

# Erweiterung der Ackermann-Formel für Mehrgrößensysteme um Freiheitsgrade zur Führungsentkopplung

Extension of Ackermann's formula for multivariable systems by degrees of freedom for input-output decoupling

Prof. Dr.-Ing. habil. Uwe Nuß, Hochschule Offenburg

**Zusammenfassung:** Der Beitrag zeigt bisher nicht genutzte Freiheitsgrade beim Entwurf eines linearen, zeitinvarianten Zustandsreglers für steuerbare Mehrgrößensysteme auf, wenn dieser auf der Basis der Ackermann'schen Formel [1, 2] durchgeführt wird. Darüber hinaus wird dargelegt, wie diese Freiheitsgrade zur Führungsentkopplung gezielt eingesetzt werden können. Damit dies gelingt, wird wie in der einschlägigen Literatur eine Transformation der Zustandsgleichungen in eine teilsystemorientierte Struktur vorgenommen. Jedoch werden modifizierte Transformationsbeziehungen verwendet, die die benötigten Freiheitsgrade hervorbringen. Der Beitrag konzentriert sich hierbei auf zeitdiskrete Systeme, wenngleich die geschilderte Vorgehensweise grundsätzlich auch bei zeitkontinuierlichen Systemen anwendbar ist. Angesichts der gewählten Methodik, die Regelungseigenwerte vorzugeben und die verbleibenden Freiheitsgrade zur Erfüllung weiterer Forderungen an den Regler heranzuziehen, ist das vorgestellte Verfahren eine unmittelbare Alternative zu anderen Polvorgabeverfahren wie z. B. zur Vollständigen Modalen Synthese [3, 4] oder zum in [5] behandelten Verfahren. Im Fall einer nicht realisierbaren vollständigen Führungsentkopplung bietet die vorgestellte Methode die Möglichkeit einer Lösungsfindung, bei der die verbleibenden Verkopplungen im Sinne eines quadratischen Gütemaßes minimiert werden.

**Abstract:** The paper shows previously unused degrees of freedom in the design of a linear, time-invariant state controller for controllable multi-variable systems, if this is based upon Ackermann's formula [1, 2]. In addition, it is explained how these degrees of freedom can be applied specifically for setpoint decoupling. To achieve this, the state equations are transformed into a sub-system oriented structure, as in the relevant literature. However, modified transformation relations are used which produce the required degrees of freedom. The article concentrates on time-discrete systems, although the described procedure can be applied to time-continuous ones, too. Due to the chosen methodology of specifying the control eigenvalues and using the remaining degrees of freedom to fulfill further requirements on the controller, the method presented is an alternative to other pole placement procedures such as the Complete Modal Synthesis [3, 4] or the procedure presented in [5]. In case of an incomplete setpoint decoupling, the method presented offers the possibility of specifying a solution that minimizes the remaining coupling in the sense of a quadratic quality criterion.

## 1 Einführung

Der Zustandsreglerentwurf für lineare, zeitinvariante Systeme ist seit geraumer Zeit in vielfältiger Weise in Fachkreisen etabliert. Das rechentechnisch und methodisch einfachste Verfahren ist bei Eingrößensystemen die Polvorgabe mit der Ackermann'schen Formel zur Berechnung des daraus hervorgehenden Zustandsreglers [2, 6 - 10].

So geradlinig und einfach die Polvorgabe bei Eingrößensystemen ist, so diffizil wird sie im Mehrgrößenfall. Dennoch existieren hierfür Lösungen – auch welche mit vielen Parallelen zur Ackermann'schen Formel für Eingrößensysteme. Diese gehen vor allem auf eine von *Luenberger* für Mehrgrößensysteme eingeführte teilsystemorientierte Normalform zurück [11], die in [2] als Regelungsnormform nach *Luenberger* bezeichnet wird. In der ihm eigenen Systematik hat *Ackermann* die darauf basierende Reglerentwurfsmethodik weiterentwickelt [1, 2]. Darin sowie in weiteren Veröffentlichungen wie beispielsweise in [8, 12] wurden die Freiheitsgrade, über die diese Vorgehensweise grundsätzlich verfügen kann, jedoch noch nicht vollständig ausgeschöpft. Deshalb war damit die Erschließung von Aufgabenfeldern wie der Führungsentkopplung – bei der Beschränkung auf konstante Zustandsrückführungen – bislang nicht möglich. Infolgedessen füllten andere Reglerentwurfverfahren diese Lücke. Vor allem die von *Roppenecker* begründete *Vollständige Modale Synthese* [3, 4] ist diesbezüglich zu nennen, bei der neben den Regelungseigenwerten die weiteren vorhandenen Reglerentwurfseigenwerte konsequent herausgearbeitet und für die angesprochenen Entwurfsziele eingesetzt wurden. Zu zeigen, dass die auf der teilsystemorientierten Zustandsraumtransformation und der Ackermann-Formel für Mehrgrößensysteme basierende Methodik ebenfalls über ausreichend viele Freiheitsgrade verfügt und in der Lage ist, damit über die Regelungseigenwertplatzierung hinausgehende Reglerentwurfziele zu erfüllen, ist das Hauptanliegen dieses Beitrags. Eine weitere Motivation ist die relativ einfache Struktur der erzeugten Reglerformel. Sie weist im Vergleich zur Vollständigen Modalen Synthese deutlich weniger Matrixinvertierungen auf. Allerdings kommen beim hier vorgestellten Verfahren noch Überprüfungen von Spaltenvektoren der Steuerbarkeitsmatrix auf lineare Unabhängigkeit hinzu. Dafür besteht bei ihm die Möglichkeit, im Fall einer durch konstante Rückführungen nicht vollständig durchführbaren Führungsentkopplung eine Lösung anzugeben, die die verbleibende Verkopplung im Sinne eines quadratischen Gütemaßes mini-

miert. Dieser Vorteil besteht auch gegenüber dem in [5] skizzierten Verfahren. Schließlich bleibt noch hervorzuheben, dass im Fall teilweise übereinstimmender Strecken- und Regelungsgegenwerte sowie im Fall eines nicht diagonalähnlichen Systems beim vorgestellten Verfahren weder Sonderbehandlungen durchgeführt werden müssen noch Einschränkungen existieren.

Nach der Beschreibung der Regelstrecke im Abschnitt 2 werden im Abschnitt 3 die Ergebnisse der klassischen Mehrgrößenvorgaberegulation gemäß [1, 2, 8, 12], aufbereitet für zeitdiskrete Systeme, in kompakter Form wiedergegeben. Anschließend werden in Abschnitt 4 die vorgenommenen Modifikationen erläutert und die benötigten Freiheitsgrade eingeführt. Im Abschnitt 5 werden sie dazu benutzt, die Entkopplung des Führungsverhaltens so weit wie möglich durchzuführen. Ein Beispiel schließt die Betrachtungen ab.

## 2 Zugrundeliegende Streckenbeschreibung

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die vektorielle Zustandsgleichung

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(T) \mathbf{x}_k + \mathbf{H}(T) \mathbf{u}_k \quad (1)$$

einer linearen, zeitinvarianten Mehrgrößensystemregelstrecke [2, 6, 7, 10]. Darin sind  $\mathbf{x}$  der  $n$ -dimensionale Zustandsvektor,  $\mathbf{u}$  der  $p$ -dimensionale Steuervektor und  $T$  die Abtastzeit. Mit dem Index  $k \in \mathbb{N}_0$  wird der Abtastzeitpunkt nummeriert. Die Matrix  $\Phi(T) = \Phi$  ist die  $(n, n)$ -dimensionale Transitionsmatrix und  $\mathbf{H}(T) = \mathbf{H}$  die  $(n, p)$ -dimensionale zeitdiskrete Steuereingangsmatrix. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird zur Vermeidung von Weitläufigkeiten bei der Herleitung der Entwurfsvorschriften auf die Berücksichtigung von Störgrößeneinflüssen verzichtet. Ergänzt wird die Streckenbeschreibung noch um die (Regelgrößen)ausgangsgleichung

$$\mathbf{y}_{R,k} = \mathbf{C}_R \mathbf{x}_k \quad (2)$$

mit dem  $q_R$ -dimensionalen Vektor  $\mathbf{y}_R$  der Regelgrößen und der  $(q_R, n)$ -dimensionalen Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}_R$ . Durchgriffe werden vernachlässigt.

Die so modellierte Regelstrecke soll mit einer konstanten Zustandsrückführung geregelt werden. Das zugehörige Regelgesetz lautet bei nicht vorhandener Stellgrößenvorsteuerung und Störgrößenaufschaltung [2, 6]

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{M} \mathbf{w}_k - \mathbf{K} \mathbf{x}_k \quad (3)$$

Darin wird mit  $\mathbf{K}$  die Reglermatrix, mit  $\mathbf{M}$  die Vorfiltermatrix und mit  $\mathbf{w}$  der Vektor der Führungsgrößen bezeichnet. Nachfolgend wird davon ausgegangen, dass deren Anzahl mit der Anzahl der Stellgrößen übereinstimmt, d. h. es soll  $q_R = p$  gelten.

## 3 Mehrgrößenvorgabereglerentwurf nach Ackermann

Von elementarer Bedeutung beim Mehrgrößenvorgabereglerentwurf ist die  $(n, pn)$ -dimensionale Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{Q}_S = [\mathbf{H} \quad \Phi \mathbf{H} \quad \Phi^2 \mathbf{H} \quad \dots \quad \Phi^{n-1} \mathbf{H}] \quad (4)$$

Für sie wird Höchstrang vorausgesetzt, was gleichbedeutend ist mit der vollständigen Steuerbarkeit der Regelstrecke [6, 10]. Aus  $\mathbf{Q}_S$  wird nun gemäß [1, 2] eine quadratische Matrix  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  gebildet, die ausschließlich voneinander linear unabhängige Spaltenvektoren aus  $\mathbf{Q}_S$  enthält. Dabei werden linksbündig beginnend diejenigen Spaltenvektoren von  $\mathbf{Q}_S$  nach  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  transferiert, die von

den bereits übertragenen linear unabhängig sind. Der am weitesten links stehende Spaltenvektor von  $\mathbf{Q}_S$  wird immer nach  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  transferiert. Linear abhängige Spaltenvektoren werden übersprungen. Wegen der vorausgesetzten Steuerbarkeit der Regelstrecke existieren in  $\mathbf{Q}_S$  hinsichtlich der Anzahl genau  $n$  linear unabhängige Spaltenvektoren, so dass alle Spalten von  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  mit solchen Vektoren gefüllt werden können und demnach  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  invertierbar ist. Auf diese Weise kann  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  von links beginnend aufgefüllt werden. In [1, 2] erfolgt die Anordnung der Spaltenvektoren von  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  jedoch durch unmittelbare Aneinanderreihung von denjenigen Spaltenvektoren, die auf demselben Spaltenvektor  $\mathbf{h}_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) der Steuereingangsmatrix basieren, d. h. es gilt dort

$$\bar{\mathbf{Q}}_S = [\mathbf{h}_1 \quad \Phi \mathbf{h}_1 \quad \dots \quad \Phi^{n_1-1} \mathbf{h}_1 \quad \dots \quad \mathbf{h}_p \quad \Phi \mathbf{h}_p \quad \dots \quad \Phi^{n_p-1} \mathbf{h}_p], \quad (5)$$

wobei mit  $n_1, \dots, n_p$  die sogenannten Kronecker-Indizes bezeichnet werden. Im vorliegenden Beitrag wird jedoch die nicht umsortierte Variante bevorzugt. Eine Begründung hierfür wird unmittelbar vor Gl. (24) angegeben. Bis zu dieser Stelle gelten die nachfolgenden Aussagen außer im Umfeld der Gln. (13) und (14) unabhängig davon, nach welcher der genannten Varianten die Spalten von  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  sortiert sind.

Die in Gl. (5) angegebenen Kronecker-Indizes  $n_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) geben jeweils die Anzahl der von  $\mathbf{Q}_S$  nach  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  transferierten Spaltenvektoren an, die mit  $\mathbf{h}_i$  nach dem oben erläuterten Schema gebildet werden. Für beide genannten Reihenfolgevarianten gelten hierbei die gleichen Kronecker-Indizes. Allerdings ist deren Definition in der Literatur nicht einheitlich. Im vorliegenden Beitrag wird die in [1, 2] verwendete zugrunde gelegt. Im Gegensatz dazu erfolgt z. B. in [10] eine geringfügig andere Begriffsbildung. Manchmal wird anstatt *Kronecker-Index* auch der Begriff *Steuerbarkeitsindex* verwendet (z. B. in [2]). Dann ist jedoch zwischen dieser Gebrauchswiese und der beispielsweise in [6, 10] verwendeten zu unterscheiden, für die in [2] die Umschreibung *Maximaler Steuerbarkeitsindex* verwendet wird. Des Weiteren unterscheiden sich die Kronecker-Indizes im Allgemeinen von den Differenzordnungen der Ausgangs- bzw. Regelgrößen [4, 9]. Nur im Sonderfall  $\mathbf{t}_{1,TS1}^T = \mathbf{c}_{R,i}^T$ ;  $i = 1, \dots, p$  [13] (zur Definition von  $\mathbf{t}_{1,TS1}^T$  siehe weiter unten) bei gleichzeitiger Übereinstimmung von Systemordnung und Differenzordnung des Gesamtsystems sind beide Begriffe identisch.

Die Kronecker-Indizes nach [1, 2] sind systeminvariante Größen [14]. D. h. sie können nicht frei vorgegeben werden. Für sie gilt bei steuerbarer Strecke [1, 2]

$$\sum_{i=1}^p n_i = n \quad (6)$$

Mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1,TS1}^T \\ \mathbf{t}_{2,TS1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{n_1,TS1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{1,TSp}^T \\ \mathbf{t}_{2,TSp}^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{n_p,TSp}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1,TS1}^T \\ \mathbf{t}_{1,TS1}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{1,TS1}^T \Phi^{n_1-1} \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{1,TSp}^T \\ \mathbf{t}_{1,TSp}^T \Phi \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{1,TSp}^T \Phi^{n_p-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

bei zunächst noch nicht festgelegten Zeilenvektoren  $\mathbf{t}_{1,TS1}^T, \dots, \mathbf{t}_{1,TSp}^T$  und der Transformationsvorschrift



$[H \ \Phi H \ \dots \ \Phi^{n_i-2} H \ \Phi^{n_i-1} H]$  nun so um, dass sie mit denjenigen von  $\bar{Q}_S$  gemäß Gl. (5) übereinstimmen und wendet man diese Umsortierung auch auf die rechte Seite von Gl. (12) für  $q_{TSi}^T = e_i^T$  – ggf. mit Spaltenerweiterungen und -streichungen – an, dann erhält man die Beziehung

$$t_{1,TSi}^T \bar{Q}_S = e_{n_i,TSi}^T; \quad i = 1, \dots, p, \quad (13)$$

in der  $e_{n_i,TSi}^T$  einen Einheitszeilenvektor bedeutet, der im Element mit der Nummer  $n_1 + \dots + n_i$  eine Eins aufweist. Er kennzeichnet die jeweils letzte Zeile bzw. Spalte eines Teilsystems. Löst man nun Gl. (13) nach  $t_{1,TSi}^T$  auf, führt das schließlich auf das Resultat

$$t_{1,TSi}^T = e_{n_i,TSi}^T \bar{Q}_S^{-1}; \quad i = 1, \dots, p. \quad (14)$$

Für das transformierte Zustandsdifferenzgleichungssystem folgt daraus

$$\tilde{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \hline t_{1,TS}^T & \Phi^{n_1} T^{-1} & & & \\ \vdots & & & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \hline t_{1,TSp}^T & \Phi^{n_p} T^{-1} & & & \end{bmatrix} \tilde{x}_k + \begin{bmatrix} 0^T \\ \vdots \\ 0^T \\ e_1^T \\ \vdots \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \\ e_p^T \end{bmatrix} D^* u_k \quad (15)$$

mit  $t_{1,TS1}^T, \dots, t_{1,TSp}^T$  gemäß Gl. (14). Um darauf basierend die Regelungseigenwerte gezielt vorgeben zu können, wird  $u_k$  bei angenommener Invertierbarkeit von  $D^*$  in der Form

$$u_k = M w_k - (D^*)^{-1} (C^* T^{-1} + P) \tilde{x}_k \quad (16a)$$

$$= M w_k - (D^*)^{-1} (C^* + P T) x_k \quad (16b)$$

mit

$$C^* = \begin{bmatrix} t_{1,TS1}^T \Phi^{n_1} \\ \vdots \\ t_{1,TSp}^T \Phi^{n_p} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$P = \begin{bmatrix} a_{R,0,TS1} & \dots & a_{R,n_1-1,TS1} & p_{F,1,1,TS2} & \dots & p_{F,1,n_2,TS2} & \dots & \dots & p_{F,1,n_p,TSp} \\ p_{F,2,1,TS1} & \dots & p_{F,2,n_1,TS1} & a_{R,0,TS2} & \dots & a_{R,n_2-1,TS2} & p_{F,2,1,TS3} & \dots & p_{F,2,n_p,TSp} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{F,p,1,TS1} & \dots & p_{F,p,n_1,TS1} & p_{F,p,1,TS2} & \dots & p_{F,p,n_p-1,TSp-1} & a_{R,0,TSp} & \dots & a_{R,n_p-1,TSp} \end{bmatrix} \quad (18)$$

und der noch festzulegenden Vorfiltermatrix  $M$  gewählt. Der die Matrix  $C^*$  enthaltende Term bewirkt hierbei die Kompensation der in  $\tilde{\Phi}$  vorkommenden Zeilenvektoren  $t_{1,TS1}^T \Phi^{n_1} T^{-1}, \dots, t_{1,TSp}^T \Phi^{n_p} T^{-1}$ . Die Matrix  $P$  führt dagegen dazu, dass in den modifizierten Zeilen von  $\tilde{\Phi}$  solche Elemente platziert werden, die zu einem gewünschten charakteristischen Polynom des geregelten Systems führen. Denn das Einsetzen von Gl. (16a) in Gl. (9) bzw. (15) liefert die transformierte Zustandsdifferenzgleichung

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{\Phi}_R \tilde{x}_k + \tilde{H} M w_k \quad (19)$$

mit der transformierten Transitionsmatrix

$$\tilde{\Phi}_R = \tilde{\Phi} - \tilde{H} (D^*)^{-1} (C^* T^{-1} + P)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \hline -a_{R,0,TS1} & \dots & -a_{R,n_1-1,TS1} & -p_{F,1,1,TS2} & \dots & -p_{F,1,n_p,TSp} \\ \hline \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \hline 0 & & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \hline -p_{F,p,1,TS1} & \dots & -p_{F,p,n_p-1,TSp-1} & -a_{R,0,TSp} & \dots & -a_{R,n_p-1,TSp} \end{bmatrix} \quad (20a)$$

und der transformierten Steuereingangsmatrix

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0^T \\ \vdots \\ 0^T \\ e_1^T \\ \vdots \\ 0^T \\ \vdots \\ 0^T \\ e_p^T \end{bmatrix} D^* = \sum_{i=1}^p e_{n_i,TSi} e_i^T D^* \quad (20b)$$

des geregelten Systems. Dessen charakteristisches Polynom lautet gemäß [1]

$$\det(zI - \tilde{\Phi}_R) =$$

$$= \det \left( \begin{bmatrix} z^{n_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & z^{n_p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{R,0,TS1} + a_{R,1,TS1}z + \dots + a_{R,n_1-1,TS1}z^{n_1-1} & \dots \\ \vdots & \\ p_{F,p,1,TS1} + p_{F,p,2,TS1}z + \dots + p_{F,p,n_1,TS1}z^{n_1-1} & \dots \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \left( \begin{bmatrix} P_{R,11}(z) & \dots & P_{R,1p}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{R,p1}(z) & \dots & P_{R,pp}(z) \end{bmatrix} \right) = \det P_R(z). \quad (21)$$

Laut [1] werden nun durch die Vorgabe der Polynome  $P_{R,11}(z), P_{R,21}(z), \dots, P_{R,pp}(z)$  die Pole bzw. Eigenwerte des geregelten Systems festgelegt. Für die hierzu erforderliche Reglermatrix erhält man aus Gl. (16b) die Beziehung

$$K = (D^*)^{-1} (C^* + P T) \quad (22a)$$

$$= (D^*)^{-1} \left[ \begin{aligned} & t_{1,TS1}^T (a_{R,0,TS1} I + \dots + a_{R,n_1-1,TS1} \Phi^{n_1-1} + \Phi^{n_1}) + t_{1,TS2}^T (p_{F,1,1,TS2} I + \dots) + \dots \\ & \vdots \\ & t_{1,TS1}^T (p_{F,p,1,TS1} I + \dots) + \dots + t_{1,TSp}^T (a_{R,0,TSp} I + \dots + a_{R,n_p-1,TSp} \Phi^{n_p-1} + \Phi^{n_p}) \end{aligned} \right]$$

$$= (D^*)^{-1} \begin{bmatrix} t_{1,TS1}^T P_{R,11}(\Phi) + \dots + t_{1,TSp}^T P_{R,1p}(\Phi) \\ \vdots \\ t_{1,TS1}^T P_{R,p1}(\Phi) + \dots + t_{1,TSp}^T P_{R,pp}(\Phi) \end{bmatrix}. \quad (22b)$$

Darauf, dass nicht alle Elemente der Matrix  $P$  für die Polfestlegung erforderlich sind, sondern Freiheitsgrade existieren, die zur Erfüllung anderer Regelungsaufgaben verwendet werden können, wurde bereits in [1, 2, 8, 12] hingewiesen.

Vollständigkeithalber soll an dieser Stelle noch die Bestimmungsgleichung für die Vorfiltermatrix  $M$  angegeben werden. Sie ergibt sich aus der Forderung nach stationärer Genauigkeit im Führungsverhalten, wenn im Regler keine Integratoren eingesetzt werden, und lautet [6]

$$M = (C_R (I - \Phi + H K)^{-1} H)^{-1}. \quad (23)$$

Aber selbst dann, wenn die stationäre Genauigkeit über Reglerintegratoren sichergestellt wird, bringt es Vorteile, Gl. (23) als Bestimmungsgleichung von  $M$  anzuwenden [16, 17].

#### 4 Teilsystementkopplung und Schaffung von Transformationsfreiheitsgraden

In Vorbereitung eines Reglerentwurfs zur Entkopplung des Führungsverhaltens werden zunächst die  $p$  Teilsysteme voneinander entkoppelt. Hierzu genügt es, die in der Matrix  $P$  enthaltenen Elemente  $p_{F,1,1,TS2}, \dots, p_{F,p,n_{p-1},TSp-1}$  zu null zu setzen. Denn in diesem Fall zerfällt  $\tilde{\Phi}_R$  in eine Blockdiagonalmatrix und die Polynommatrix  $P_R(z)$  wird zu einer Diagonalmatrix. Die Elemente  $a_{R,0,TSi}, \dots, a_{R,n_i-1,TSi}$  sind dann die Koeffizienten der jeweiligen charakteristischen Polynome der Teilsysteme von  $\tilde{\Phi}_R$ . Damit sind die Regelungseigenwerte von  $\tilde{\Phi}_R$  sowie diejenigen von  $\Phi_R$  festgelegt. Weil die Elemente  $p_{F,1,1,TS2}, \dots, p_{F,p,n_{p-1},TSp-1}$  offensichtlich zu einer Verkopplung der Teilsysteme führen, können sie als Verkopplungsfreiheitsgrade bezeichnet werden, sofern sie nicht zur Festlegung des charakteristischen Polynoms von  $\Phi_R$  benötigt werden. Ihre Anzahl beträgt bei Beachtung von Gl. (6)

$$f_K = pn - \sum_{i=1}^p n_i = pn - n. \quad (24)$$

Das entspricht zuzüglich den  $n$  festzulegenden Regelungseigenwerten gerade den zur Verfügung stehenden  $pn$  Reglerelementen. Zur Führungsentkopplung wären dann mit der Reglerformel (22a) unter Zugrundelegung der Bestimmungsgleichungen (7) und (14) für die Transformationsmatrixzeilenvektoren jedoch keine Freiheitsgrade mehr vorhanden. Allerdings war im Abschnitt 3 bereits ersichtlich, dass die Festlegung  $q_{TSi}^T = e_i^T$  sowie die eventuelle rechtsbündige Ergänzung von  $q_{TSi}^T$  um weitere Nullen willkürlich war. Hebt man sie auf, dann sind andere Freiheitsgrade erschließbar, die im Abschnitt 5 dazu benutzt werden, das Führungsverhalten so weit wie möglich zu entkoppeln. Hierzu wird in diesem Abschnitt sowie in den nachfolgenden die Anordnung der Spalten von  $Q_S$  in der Weise zugrundegelegt, dass sie gegenüber  $Q_S$  nicht vertauscht sind, sondern lediglich die linear abhängigen Spalten – linksbündig beginnend – gestrichen werden. Dadurch wird die in Gl. (12) erkennbare Blockbildung von Nullelementen und nicht auf null gezwungenen Elementen beibehalten, was die Übersichtlichkeit der nachfolgenden Schritte erhöht.

Um die Nullzeilen in Gl. (10c) zu erzeugen, wird der Ansatz

$$t_{1,TSi}^T \bar{Q}_S = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \bar{q}_{TSi}^T]; \quad i = 1, \dots, p. \quad (25)$$

verfolgt, bei dem  $\bar{q}_{TSi}^T$  ein nahezu beliebig vorgebarer Zeilenvektor ist, dem so viele führende Nullen vorausgehen, wie es in  $\bar{Q}_S$  von links beginnend Spaltenvektoren bis einschließlich zum Matrixblock  $\Phi^{n_i-2}H$  gibt. Beachtet werden muss bei der Vorgabe von  $\bar{q}_{TSi}^T$  lediglich, dass wegen der in Gl. (11) angegebenen Abhängigkeit der Matrix  $D^*$  von  $t_{1,TSi}^T$  die Invertierbarkeit von  $D^*$  erhalten bleibt.

Die rechte Seite von Gl. (25) enthält  $\sum_{j=1}^p \min\{n_j; n_i - 1\}$  führende Nullen, so dass  $\bar{q}_{TSi}^T$  aus  $n - \sum_{j=1}^p \min\{n_j; n_i - 1\}$  Elementen besteht. Um diesen Zusammenhang zu erhalten, wird bei allen Spalten  $j$  ( $j = 1, \dots, p$ ) der Matrixblöcke  $H, \Phi H, \dots, \Phi^{n_i-2}H$  untersucht, ob sie in  $\bar{Q}_S$  enthalten sind, und zwar in der Reihenfolge  $h_1, \Phi h_1, \dots, \Phi^{n_i-2}h_1, h_2, \Phi h_2, \dots$ . Für  $h_j = h_i$  sind es per Definition genau  $n_i - 1$  Spalten. Gilt  $n_j < n_i$ , dann

stammen von der Matrixkette  $H, \Phi H, \dots, \Phi^{n_i-2}H$  genau  $n_j$  Spalten, die in  $\bar{Q}_S$  enthalten sind und mit  $h_j$  gebildet werden. Spalten der Vektorkette  $h_j, \Phi h_j, \dots, \Phi^{n_j-1}h_j$  mit höheren Potenzen von  $\Phi$  als  $n_j - 1$  kommen darin nicht vor, weil sie wegen ihrer linearen Abhängigkeit nicht von  $Q_S$  nach  $\bar{Q}_S$  übertragen wurden. Gilt dagegen die Ungleichung  $n_j \geq n_i$ , dann wurde die Vektorkette  $h_j, \Phi h_j, \dots, \Phi^{n_j-1}h_j$  bis zur ersten in  $\bar{Q}_S$  enthaltenen Spalte des Blocks  $\Phi^{n_i-1}H$  noch nicht unterbrochen, so dass links von dieser Spalte genau  $n_i - 1$  Spaltenvektoren der Vektorkette  $h_j, \Phi h_j, \dots, \Phi^{n_j-1}h_j$  stehen. Insgesamt gibt es demnach in  $[0 \quad \dots \quad 0 \quad \bar{q}_{TSi}^T]$  immer  $\sum_{j=1}^p \min\{n_j; n_i - 1\}$  geforderte Nullelemente. Werden alle  $p$  Teilsysteme berücksichtigt, so summieren sich die nicht zwangsweise genullten Elemente der rechten Seiten von Gl. (25) auf die Anzahl

$$f_T = pn - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \min\{n_j; n_i - 1\}. \quad (26a)$$

Sie werden nachfolgend als Transformationsfreiheitsgrade bezeichnet. Wegen

$$\sum_{j=1}^p \min\{n_j; n_i - 1\} \leq p(n_i - 1); \quad i = 1, \dots, p \quad (26b)$$

erhält man unter Berücksichtigung von Gl. (6) die Abschätzung

$$f_T \geq p^2. \quad (26c)$$

Wird des Weiteren berücksichtigt, dass  $\bar{q}_{TSi}^T$  nur bis auf eine multiplikative Konstante Einfluss auf die Reglermatrix nehmen kann (siehe weiter unten), gilt real

$$f_T \geq p(p - 1). \quad (26d)$$

Hinsichtlich der Anzahl der in der Reglermatrix verfügbaren Freiheitsgrade ergänzen die Transformationsfreiheitsgrade die Verkopplungsfreiheitsgrade allerdings nicht, sondern sie substituieren sie implizit anteilig.

Löst man Gl. (25) nach  $t_{1,TSi}^T$  auf, dann folgt daraus

$$t_{1,TSi}^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad \bar{q}_{TSi}^T] \bar{Q}_S^{-1} = \bar{q}_{TSi}^T X_{TSi}; \quad i = 1, \dots, p \quad (27)$$

mit der Matrix  $X_{TSi}$ , die aus den letzten  $n - \sum_{j=1}^p \min\{n_j; n_i - 1\}$  Zeilen von  $\bar{Q}_S^{-1}$  besteht. Für die Reglermatrix  $K$  ergibt sich daraus gemäß Gl. (22a) unter Beachtung der Gln. (7) und (17) sowie der genullten Verkopplungsfreiheitsgrade das Resultat

$$K = (D^*)^{-1} \begin{bmatrix} t_{1,TS1}^T (a_{R,0,TS1} I + \dots + a_{R,n_1-1,TS1} \Phi^{n_1-1} + \Phi^{n_1}) \\ \vdots \\ t_{1,TSp}^T (a_{R,0,TSp} I + \dots + a_{R,n_p-1,TSp} \Phi^{n_p-1} + \Phi^{n_p}) \end{bmatrix}. \quad (28)$$

In ihr sind über  $t_{1,TSi}^T$  sowie indirekt über  $D^*$  die eingeführten Transformationsfreiheitsgrade enthalten. Sie werden im Abschnitt 5 zur Entkopplung des Führungsverhaltens herangezogen. Es lässt sich nun durch die Multiplikation der Zeilenvektoren  $\bar{q}_{TSi}^T$  mit einem konstanten Faktor  $\mu_i$  und Ausklammern dieser Faktoren in Gl. (27) bzw. Gl. (28) sowie in Gl. (11) leicht zeigen, dass  $K$  unabhängig von  $\mu_1, \dots, \mu_p$  ist und somit Gl. (26d) gilt. Anzumerken ist außerdem, dass gemäß Gl. (25) und wegen der vorgegebenen Struktur von  $\bar{Q}_S$  allen Elementen von  $\bar{q}_{TSi}^T$  jeweils ein Produkt  $t_{1,TSi}^T \Phi^{n_i-1} h_\nu$  auf der linken Seite von Gl. (25) mit passendem Spaltenindex  $\nu$  entspricht. Da dieses auch in  $D^*$  vorkommt (vgl. Gl. (11)), kann dort an der betreffen-

den Stelle direkt das jeweilige Element von  $\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}_i}^T$  eingesetzt werden. Die übrigen Elemente von  $\mathbf{D}^*$  haben dagegen keine Spaltenentsprechung in  $\bar{\mathbf{Q}}_S$ . Die ihnen zugrundeliegenden Spalten  $\Phi^{n_i-1} \mathbf{h}_v$  sind daher linear abhängig von den links davon in  $\mathbf{Q}_S$  und zugleich in  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  vorkommenden Spaltenvektoren. Für sie ist daher im Allgemeinen keine Vereinfachung möglich. Für den Sonderfall  $n_1 = n_2 = \dots = n_p$  bedeuten die obigen Erläuterungen allerdings, dass in  $\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}_i}^T$  generell die ersten  $p$  Elemente dem Zeilenblock  $\mathbf{t}_{1,\text{TS}_i}^T \Phi^{n_i-1} \mathbf{H}$  entsprechen. Fasst man diese Elemente im Zeilenvektor  $\mathbf{q}_{\text{D},\text{TS}_i}^T$  zusammen, dann gilt in diesem Fall

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\text{D},\text{TS}_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{\text{D},\text{TS}_p}^T \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Werden darüber hinaus in allen Teilsystemen die gleichen Koeffizienten  $a_{R,0,\text{TS}_i}, \dots, a_{R,n_i-1,\text{TS}_i}$  der charakteristischen Polynome vorgegeben, dann hat das das Resultat

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\text{D},\text{TS}_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{\text{D},\text{TS}_p}^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T & \mathbf{q}_{\text{D},\text{TS}_1}^T \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T & \mathbf{q}_{\text{D},\text{TS}_p}^T \end{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_S^{-1} \cdot \\ &\cdot (a_{R,0,\text{TS}_1} \mathbf{I} + \dots + a_{R,n_1-1,\text{TS}_1} \Phi^{n_1-1} + \Phi^{n_1}) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \mathbf{I}_p \cdot \\ &\cdot \bar{\mathbf{Q}}_S^{-1} (a_{R,0,\text{TS}_1} \mathbf{I} + \dots + a_{R,n_1-1,\text{TS}_1} \Phi^{n_1-1} + \Phi^{n_1}) \end{aligned} \quad (30)$$

zur Folge. In diesem Fall sind demnach keine Transformationsfreiheitsgrade in  $\mathbf{K}$  enthalten. In der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  existieren sie dennoch.

Die Struktur der Zustandsdifferenzgleichung (15) zeigt neben der Möglichkeit zur gezielten Regelungseigenwertbeeinflussung auch die Entkoppelbarkeit der Führungsgrößeneinwirkung auf die Teilsysteme. Hierzu muss die Vorfiltermatrix  $\mathbf{M}$  lediglich eine multiplikative Komponente  $(\mathbf{D}^*)^{-1}$  aufweisen, gefolgt von einer Diagonalmatrix. Dadurch wird erreicht, dass die  $i$ -te Führungsgröße ausschließlich das  $i$ -te Teilsystem beeinflusst, wodurch eine wesentliche Voraussetzung für die Entkopplung des Führungsverhaltens geschaffen wird (siehe Abschnitt 5). Wird aus applikationsspezifischen Gründen oder wegen einer besseren Regelgrößenrekonstruierbarkeit (siehe ebenfalls Abschnitt 5) eine andere Zuordnung der Führungsgrößen zu den Teilsystemen gewünscht, erfolgt das am einfachsten durch Umsortierung der Führungsgrößen, gefolgt von einer entsprechenden Umsortierung der Elemente von  $\mathbf{y}_R$  sowie der Zeilenvektoren von  $\mathbf{C}_R$ . Abschließend bleibt noch darauf hinzuweisen, dass auch in [13] auf die hier erläuterte multiplikative Struktur der Vorfiltermatrix sowie der Reglermatrix gemäß Gl. (22a) aufmerksam gemacht wird, wengleich in [13] eine andere Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  zugrundegelegt wurde. Darüber hinaus gilt, dass die geschilderte Zusammensetzung von  $\mathbf{M}$  keinen Widerspruch zu Gl. (23) darstellt, wie im Abschnitt 5 gezeigt werden wird.

## 5 Führungsentkopplung

Nachdem im Abschnitt 4 erläutert wurde, wie die  $p$  Teilsysteme voneinander entkoppelt werden können und wie  $\mathbf{M}$  strukturiert

sein muss, damit jede Führungsgröße genau ein Teilsystem beeinflusst, ist zur Führungsentkopplung im Idealfall nur noch dafür zu sorgen, dass sich die Regelgrößen jeweils ausschließlich aus transformierten Zustandsgrößen zusammensetzen, die zum selben Teilsystem gehören. Denn weil jede Führungsgröße nur ein einziges Teilsystem anregt, wird eine Regelgröße, die sich nur aus transformierten Zustandsgrößen desselben Teilsystems zusammensetzt, auch nur von der betreffenden Führungsgröße beeinflusst. Um zu erkennen, wie das gelingen kann, wird zunächst die Ausgangsgleichung (2) in die teilsystemorientierte Darstellung transformiert. Durch Einsetzen der nach  $\mathbf{x}$  aufgelösten und mit  $k$  indizierten Gl. (8) in Gl. (2) ergibt sich dann

$$\mathbf{y}_{R,k} = \mathbf{C}_R \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{C}}_R \tilde{\mathbf{x}}_k. \quad (31)$$

Hierbei muss selbstverständlich die Invertierbarkeit von  $\mathbf{T}$  gewährleistet sein. Während sie bisher implizit als gegeben angenommen wurde, wird sie am Ende des Beitrags explizit nachgewiesen und die hierfür zu erfüllende Voraussetzung aufgezeigt.

Damit sich nun die Regelgröße  $y_{R,i}$  nur aus transformierten Zustandsgrößen zusammensetzt, die zum  $i$ -ten Teilsystem gehören, muss  $\tilde{\mathbf{C}}_R$  eine Blockdiagonalstruktur der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}}_R &= \mathbf{C}_R \mathbf{T}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{c}_{R,1,1,\text{TS}_1} & \dots & \tilde{c}_{R,1,n_1,\text{TS}_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{c}_{R,2,1,\text{TS}_2} & \dots & \tilde{c}_{R,2,n_2,\text{TS}_2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \tilde{c}_{R,p,1,\text{TS}_p} & \dots & \tilde{c}_{R,p,n_p,\text{TS}_p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

aufweisen. Die Multiplikation von Gl. (32) von rechts mit  $\mathbf{T}$  führt schließlich für die  $i$ -te Zeile von  $\mathbf{C}_R$  auf die Beziehung

$$\mathbf{c}_{R,i}^T = \sum_{v=1}^{n_i} \tilde{c}_{R,i,v,\text{TS}_i} \mathbf{t}_{v,\text{TS}_i}^T; \quad i = 1, \dots, p. \quad (33)$$

Gelingt es demnach, den Zeilenvektor  $\mathbf{c}_{R,i}^T$  aus einer Linearkombination der Transformationsmatrixzeilenvektoren des  $i$ -ten Teilsystems zusammenzusetzen, dann ist die auf das Führungsverhalten bezogene Entkopplung der  $i$ -ten Regelgröße von den übrigen durch eine konstante Zustandsrückführung möglich. Es ist allerdings damit zu rechnen, dass dieses Ziel – u. a. in Abhängigkeit von den Differenzordnungen der Regelgrößen – nicht immer erreichbar ist [4, 18]. Kommt diese Rekonstruktion von  $\mathbf{c}_{R,i}^T$  nicht zustande, so kann es mit der nachfolgend beschriebenen Vorgehensweise immerhin noch gelingen, den Einfluss anderer Teilsysteme auf das  $i$ -te systematisch zu reduzieren. Zu beachten ist in diesem Zusammenhang, dass die Koeffizienten  $\tilde{c}_{R,i,j,\text{TS}_i}$  ( $i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, n_i$ ) der transformierten Ausgangsmatrix im Fall verschwindender Verkopplungsfreiheitsgrade sowie der Diagonalgestalt des Matrixprodukts  $\mathbf{D}^* \mathbf{M}$  wegen des Auftretens der jeweiligen Hauptdiagonalblöcke der transformierten Transitionsmatrix der teilsystementkoppelten Regelung in Regelungsnormalform bei fehlendem Durchgriff genau die Koeffizienten des Zählerpolynoms der betreffenden Führungsübertragungsfunktion zwischen der  $i$ -ten Führungsgröße und der  $i$ -ten Regelgröße sind (siehe [2] oder weiter unten). Sie ergeben sich daher aus einer Untermenge der Nullstellen des geregelten Systems. Da aber die Nullstellen eines Systems invariant gegenüber konstanten Rückführungen sind [9], ändern sich diese Koeffizienten – abgesehen von unterschiedlichen Nullstellenkombinationen – nicht durch Reglervariationen und somit auch nicht bei der Variation von  $\mathbf{t}_{1,\text{TS}_i}^T$  über  $\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}_i}^T$ . Es bietet sich daher an, die Koeffizienten  $\tilde{c}_{R,i,j,\text{TS}_i}$  bei der Suche nach für die Führungsentkopplung geeigneten Zeilenvektoren  $\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}_i}^T$  ( $i = 1, \dots, p$ ) sofort mit den Koeffizienten des aus den Nullstellen hervorgehenden Polynoms

gleichzusetzen. Weil die Zeilenvektoren  $\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}i}^T$  und somit auch alle Zeilenvektoren der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  sowie alle Spaltenvektoren von deren Kehrmatrix nur bis auf eine multiplikative Konstante genau bestimmbar sind, kann hierbei der Koeffizient bei der höchsten Potenz des Polynoms  $\tilde{c}_{R,i,1,\text{TS}i} + \tilde{c}_{R,i,2,\text{TS}i}z + \dots$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Wert 1 gesetzt werden. Nachfolgend wird hiervon stets ausgegangen.

Um die Führungsentkopplung der  $i$ -ten Regelgröße herbeizuführen, wird angestrebt, Gl. (33) zu erfüllen. Damit der Fall einer nicht vollständig stabilen Entkoppelbarkeit in die Lösungsfindung eingeschlossen werden kann, ist die Verwendung eines zu minimierenden Gütemaßes für jedes Teilsystem zweckmäßig. Mit der Gütemaßbezeichnung  $J_{\text{TS}i}$  hat sich die Definition

$$J_{\text{TS}i} = \frac{1}{2} (\sum_{v=1}^{n_i} \tilde{c}_{R,i,v,\text{TS}i} \mathbf{t}_{v,\text{TS}i}^T - \mathbf{c}_{R,i}^T) \mathbf{G}_{\text{TS}i} (\sum_{v=1}^{n_i} \tilde{c}_{R,i,v,\text{TS}i} \mathbf{t}_{v,\text{TS}i} - \mathbf{c}_{R,i});$$

$$i = 1, \dots, p \quad (34)$$

bewährt, worin  $\mathbf{G}_{\text{TS}i}$  eine positiv definite  $(n, n)$ -dimensionale Gewichtungsmatrix ist. Unter Beachtung von Gl. (7) sowie der Abkürzung

$$\mathbf{N}_{\text{TS}i} = \sum_{v=1}^{n_i} \tilde{c}_{R,i,v,\text{TS}i} \boldsymbol{\Phi}^{v-1}; \quad i = 1, \dots, p \quad (35)$$

lässt sich dann  $J_{\text{TS}i}$  in die Form

$$J_{\text{TS}i} = \frac{1}{2} (\mathbf{t}_{1,\text{TS}i}^T \mathbf{N}_{\text{TS}i} - \mathbf{c}_{R,i}^T) \mathbf{G}_{\text{TS}i} (\mathbf{N}_{\text{TS}i}^T \mathbf{t}_{1,\text{TS}i} - \mathbf{c}_{R,i})$$

$$= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}i}^T \mathbf{X}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i} - \mathbf{c}_{R,i}^T) \mathbf{G}_{\text{TS}i} (\mathbf{N}_{\text{TS}i}^T \mathbf{X}_{\text{TS}i}^T \bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}i} - \mathbf{c}_{R,i});$$

$$i = 1, \dots, p \quad (36)$$

bringen. Im Minimum der Funktion  $J_{\text{TS}i} = f(\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}i}^T)$  weist der Ausdruck  $\mathbf{t}_{1,\text{TS}i}^T \mathbf{N}_{\text{TS}i}$  im obigen quadratischen Sinn die geringste Abweichung von  $\mathbf{c}_{R,i}^T$  auf. Von  $J_{\text{TS}i}$  ist deshalb die partielle Ableitung nach  $\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}i}^T$  zu bilden und mit dem Nullzeilenvektor gleichzusetzen. Daraus folgt die Beziehung

$$\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}i}^T = \mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{G}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i}^T \mathbf{X}_{\text{TS}i}^T (\mathbf{X}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i} \mathbf{G}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i}^T \mathbf{X}_{\text{TS}i}^T)^{-1};$$

$$i = 1, \dots, p. \quad (37)$$

Für die Ableitung  $\frac{\partial J_{\text{TS}i}}{\partial \bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}i}^T}$  ergibt sich

$$\frac{\partial J_{\text{TS}i}}{\partial \bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}i}^T} = \mathbf{X}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i} \mathbf{G}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i}^T \mathbf{X}_{\text{TS}i}^T; \quad i = 1, \dots, p. \quad (38)$$

Weist  $\mathbf{N}_{\text{TS}i}$  Höchststrang auf, ist die positive Definitheit von  $\mathbf{X}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i} \mathbf{G}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i}^T \mathbf{X}_{\text{TS}i}^T$  wegen der aus  $\bar{\mathbf{Q}}_S^{-1}$  hervorgehenden Zeilenregularität von  $\mathbf{X}_{\text{TS}i}$  sowie wegen der positiven Definitheit von  $\mathbf{G}_{\text{TS}i}$  gegeben.  $\mathbf{X}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i} \mathbf{G}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i}^T \mathbf{X}_{\text{TS}i}^T$  ist dann regulär.

Ist  $\mathbf{X}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i} \mathbf{G}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i}^T \mathbf{X}_{\text{TS}i}^T$  positiv definit, beschreibt Gl. (37) eine Minimumstelle. Nimmt  $J_{\text{TS}i}$  im Minimum den Wert null an, dann ist  $y_{R,i}$  von den anderen Regelgrößen bezüglich des Führungsverhaltens vollständig entkoppelt. Es ist auch darauf hinzuweisen, dass es Konstellationen gibt, in denen das Optimierungsergebnis nicht von  $\mathbf{G}_{\text{TS}i}$  abhängt. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn  $\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}i}^T$  die Gleichung

$$\bar{\mathbf{q}}_{\text{TS}i}^T \mathbf{X}_{\text{TS}i} \mathbf{N}_{\text{TS}i} = \mathbf{c}_{R,i}^T; \quad i = 1, \dots, p \quad (39)$$

erfüllt. Denn gemäß Gl. (36) ist dann das Gütemaß null und somit  $\mathbf{c}_{R,i}^T$  exakt aus einer Linearkombination der Transformationsmatrixzeilenvektoren  $\mathbf{t}_{1,\text{TS}i}^T, \dots, \mathbf{t}_{n_i,\text{TS}i}^T$  rekonstruiert.

Liegt eine Blockdiagonalstruktur von  $\tilde{\mathbf{C}}_R$  gemäß Gl. (32) vor, dann lässt sich zeigen – wie bereits angedeutet wurde –, dass die

Vorfiltermatrix  $\mathbf{M}$  aus dem Produkt von  $(\mathbf{D}^*)^{-1}$  und einer Diagonalmatrix besteht. Hierzu werden in Gl. (23) die aus den Gln. (10a), (10b) und (32) hervorgehenden Transformationsbeziehungen

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{T}, \quad (40a)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{H}}, \quad (40b)$$

$$\mathbf{C}_R = \tilde{\mathbf{C}}_R \mathbf{T} \quad (40c)$$

sowie Gl. (22a) eingesetzt. Daraus ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (20a)

$$\mathbf{M} = (\tilde{\mathbf{C}}_R \mathbf{T} (\mathbf{T}^{-1} (\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\Phi}} + \tilde{\mathbf{H}} (\mathbf{D}^*)^{-1} (\mathbf{C}^* + \mathbf{P} \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-1}) \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^{-1} \tilde{\mathbf{H}})^{-1}$$

$$= (\tilde{\mathbf{C}}_R (\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\Phi}} + \tilde{\mathbf{H}} (\mathbf{D}^*)^{-1} (\mathbf{C}^* \mathbf{T}^{-1} + \mathbf{P}))^{-1} \tilde{\mathbf{H}})^{-1}$$

$$= (\tilde{\mathbf{C}}_R (\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_R)^{-1} \tilde{\mathbf{H}})^{-1}. \quad (41)$$

Da nun  $\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_R$  bei verschwindenden Verkopplungsfreiheitsgraden eine Blockdiagonalmatrix mit den  $(n_1, n_1)$ -, ...,  $(n_p, n_p)$ -dimensionalen Matrixblöcken auf der Blockmatrixhauptdiagonalen ist, weist auch die Inverse von  $\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_R$  diese Struktur auf. Die Multiplikation von ihr mit  $\tilde{\mathbf{H}}$  gemäß Gl. (20b) führt somit auf eine Ergebnismatrix mit der Struktur

$$(\mathbf{I} - \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_R)^{-1} \tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x & & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x \end{bmatrix} \mathbf{D}^*, \quad (42)$$

wobei  $x$  Elemente kennzeichnet, die ungleich null sein können. Multipliziert man das Matrizenprodukt aus Gl. (42) von links mit der Matrix  $\tilde{\mathbf{C}}_R$  aus Gl. (32), die transponiert dieselbe Struktur wie die Matrix links neben  $\mathbf{D}^*$  in Gl. (42) aufweist, dann entsteht daraus eine Diagonalmatrix, multiplikativ gefolgt von  $\mathbf{D}^*$ . Die Inversion dieses Produkts liefert die zur Führungsentkopplung benötigte, im Abschnitt 4 geforderte Struktur von  $\mathbf{M}$ . D. h., dass als Bestimmungsgleichung für  $\mathbf{M}$  grundsätzlich Gl. (23) verwendet werden kann. Das gilt auch für den Fall, dass keine vollständige Entkopplung erzielt wurde und demnach  $\tilde{\mathbf{C}}_R$  nicht die in Gl. (32) angegebene Struktur aufweist. Dann ist zwar  $\mathbf{D}^* \mathbf{M}$  nicht mehr gesichert eine Diagonalmatrix. Aber mittels Gl. (23) existiert immerhin eine Berechnungsvorschrift für  $\mathbf{M}$ , die dieses Ziel anstrebt und die für stationäre Genauigkeit im Führungsverhalten auch ohne Reglerintegratoren sorgt.

Kann für  $\tilde{\mathbf{C}}_R$  die in Gl. (32) angegebene Blockdiagonalstruktur nicht erzielt werden, besteht zur Verbesserung der Entkopplungseigenschaften noch die Möglichkeit, von der Vorgabe, alle Verkopplungsfreiheitsgrade auf null zu setzen, wieder abzurücken. Denn bei Nichterfüllung von Gl. (32) brauchen auch die Teilsysteme nicht mehr vollständig voneinander entkoppelt zu sein, was ja eine Voraussetzung für die bisher beschriebene Variante der Führungsentkopplung war. Vielmehr können dann die Teilsysteme einseitig verkopelt bleiben, indem in  $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}_R$  z. B. nur diejenigen Verkopplungsfreiheitsgrade zwangsweise auf null gesetzt werden, die unterhalb der Hauptdiagonalen liegen. Dadurch haben die Koeffizienten  $a_{R,0,\text{TS}i}, \dots, a_{R,n_p-1,\text{TS}p}$  weiterhin die Bedeutung von Koeffizienten des charakteristischen Polynoms



$$\begin{pmatrix} a_{R,0,TS1} + \dots + z^{n_1} & p_{F,1,1,TS2} + \dots + p_{F,1,n_2,TS2} z^{n_2-1} & \dots & p_{F,1,1,TSp} + \dots + p_{F,1,n_p,TSp} z^{n_p-1} \\ p_{F,2,1,TS1} + \dots + p_{F,2,n_1,TS1} z^{n_1-1} & a_{R,0,TS2} + \dots + z^{n_2} & \dots & p_{F,2,1,TSp} + \dots + p_{F,2,n_p,TSp} z^{n_p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{c}_{R,1,1,TS1} + \dots + \tilde{c}_{R,1,n_1,TS1} z^{n_1-1} & \tilde{c}_{R,1,1,TS2} + \dots + \tilde{c}_{R,1,n_2,TS2} z^{n_2-1} & \dots & \tilde{c}_{R,1,1,TSp} + \dots + \tilde{c}_{R,1,n_p,TSp} z^{n_p-1} \end{pmatrix} = 0. \quad (45b)$$

Um nun zu erzwingen, dass die angegebene Determinante null wird, müssen (mindestens) zwei darin enthaltene Zeilen oder Spalten voneinander linear abhängig sein. Hierzu wird in Gl. (45b) die erste (im Allgemeinen die  $i$ -te) Zeile und die letzte, d. h. die  $p$ -te Zeile, herangezogen. Dies gilt unabhängig vom gewählten Eingang  $j$ . Wegen der dann wiedererlangbaren Übersichtlichkeit wird nachfolgend anstatt von der ersten Zeile ausnahmslos nur noch von der  $i$ -ten gesprochen.

Die lineare Abhängigkeit der kompletten  $i$ -ten von der  $p$ -ten Zeile wird in mehreren Schritten erzielt. Zunächst wird dafür gesorgt, dass der Teilzeilenvektor mit den Elementen  $(i, 1)$  und  $(i, i)$  sowie der Teilzeilenvektor mit den Elementen  $(p, 1)$  und  $(p, i)$  durch geeignete Vorgabe der darin enthaltenen Verkopplungsfreiheitsgrade linear voneinander abhängen. Dann folgt das linear abhängig Machen des Teilzeilenvektors mit den Elementen  $(i, 2)$  und  $(i, i)$  vom Teilzeilenvektor mit den Elementen  $(p, 2)$  und  $(p, i)$ , usw. Für die daraus jeweils gebildeten Unterdeterminanten gilt

$$\begin{vmatrix} a_{R,0,TSi} + \dots + z^{n_i} & p_{F,i,1,TSj} + \dots + p_{F,i,n_j,TSj} z^{n_j-1} \\ \tilde{c}_{R,i,1,TS1} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_i,TS1} z^{n_i-1} & \tilde{c}_{R,i,1,TSj} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_j,TSj} z^{n_j-1} \end{vmatrix} = 0; \quad i, j = 1, \dots, p; j \neq i. \quad (46)$$

Multipliziert man nun entsprechend den Determinantenregeln aus, sortiert das erhaltene Produkt nach Potenzen von  $z$  und setzt die dadurch entstehenden Polynomkoeffizienten gleich null, dann können die so gewonnenen Beziehungen nach den darin vorkommenden Verkopplungsfreiheitsgraden aufgelöst werden. Die Lösungsfindung vereinfacht sich allerdings erheblich, wenn man bedenkt, dass die Lösung insbesondere auch für solche  $z$  gelten muss, die Nullstellen des in Gl. (46) vorkommenden Polynoms  $\tilde{c}_{R,i,1,TS1} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_i,TS1} z^{n_i-1}$  sind. Die betrachtete Determinante kann dann bei gegebenem Polynom  $\tilde{c}_{R,i,1,TSj} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_j,TSj} z^{n_j-1}$ , das im Allgemeinen bei den gewählten Werten von  $z$  ungleich null ist, nur dadurch null ergeben, wenn die Nullstellen des Polynoms  $\tilde{c}_{R,i,1,TS1} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_i,TS1} z^{n_i-1}$  zugleich Nullstellen von  $a_{R,0,TSi} + \dots + z^{n_i}$  sind. Da die Verkopplungsfreiheitsgrade, die Gl. (46) lösen, aber unabhängig von  $z$  sein sollen und dann die Lösung im Allgemeinen eindeutig ist, kann die Festlegung, dass die Nullstellen von  $\tilde{c}_{R,i,1,TS1} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_i,TS1} z^{n_i-1}$  zugleich Nullstellen von  $a_{R,0,TSi} + \dots + z^{n_i}$  sind, als allgemeine Voraussetzung für die Lösung von Gl. (46) betrachtet werden, sofern nicht alle Koeffizienten des Polynoms  $\tilde{c}_{R,i,1,TSj} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_j,TSj} z^{n_j-1}$  null sind. Dass die beiden Polynome  $\tilde{c}_{R,i,1,TS1} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_i,TS1} z^{n_i-1}$  und  $a_{R,0,TSi} + \dots + z^{n_i}$  über gemeinsame Linearfaktoren verfügen, bewirkt des Weiteren, dass sich die ausmultiplizierte Gl. (46) um diese gemeinsamen Linearfaktoren kürzen lässt. Es verbleiben im Resultat dann nur noch die nicht kürzbaren Linearfaktoren des Polynoms  $a_{R,0,TSi} + \dots + z^{n_i}$  sowie vom Polynom  $\tilde{c}_{R,i,1,TS1} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_i,TS1} z^{n_i-1}$  der Koeffizient der höchsten Potenz von  $z$ . Letzterer wurde aufgrund der Unbestimmtheit der Zeilenvektoren  $\bar{q}_{TSi}^T$  hinsichtlich ihrer Beträge bereits auf den Wert 1 festgelegt. Wegen des Grades  $n_i - 1$  des zuletzt genannten Polynoms und des Grades  $n_i$  des Polynoms  $a_{R,0,TSi} + \dots + z^{n_i}$  handelt es sich in der Regel genau um einen einzigen verbliebenen Linearfaktor. Falls allerdings  $\tilde{c}_{R,i,n_i,TSi}$ , usw. selbst null wird, erhöht sich die

Anzahl der verbliebenen Linearfaktoren. Bei zeitdiskreten Systemen ohne Totzeitglieder in den Übertragungspfaden zwischen Eingang und Ausgang wird der Gradunterschied im Allgemeinen jedoch genau den Wert 1 aufweisen. Liegt dieser Fall vor und enthält der verbliebene Linearfaktor die Nullstelle  $\bar{z}_{R,TSi}$ , dann führt das Ausmultiplizieren der gekürzten Gl. (46) auf die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} z^0: \quad p_{F,i,1,TSj} &= -\bar{z}_{R,TSi} \tilde{c}_{R,i,1,TSj}, \\ z^1: \quad p_{F,i,2,TSj} &= \tilde{c}_{R,i,1,TSj} - \bar{z}_{R,TSi} \tilde{c}_{R,i,2,TSj}, \\ z^2: \quad p_{F,i,3,TSj} &= \tilde{c}_{R,i,2,TSj} - \bar{z}_{R,TSi} \tilde{c}_{R,i,3,TSj}, \\ &\vdots \\ z^{n_j-1}: \quad p_{F,i,n_j,TSj} &= \tilde{c}_{R,i,n_j-1,TSj} - \bar{z}_{R,TSi} \tilde{c}_{R,i,n_j,TSj}, \\ z^{n_j}: \quad \tilde{c}_{R,i,n_j,TSj} &= 0; \quad i, j = 1, \dots, p; j \neq i. \end{aligned} \quad (47)$$

Die obige Vorgehensweise kann sogar dort angewandt werden, wo Verkopplungsfreiheitsgrade zu bestimmen sind, die in  $\bar{\mathcal{D}}_R$  oberhalb und unterhalb der Hauptdiagonale liegen. Dann kann anhand der geschilderten Vorgehensweise zwar nicht mehr sichergestellt werden, dass es sich bei den Koeffizienten  $a_{R,0,TS1}, \dots, a_{R,n_p-1,TSp}$  weiterhin um die Koeffizienten der jeweiligen charakteristischen Polynome der Teilsysteme handelt. Die Entkopplung bleibt durch die geschilderten Maßnahmen aber bewahrt.

Ist der Grad des Polynoms  $\tilde{c}_{R,i,1,TS1} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_i,TS1} z^{n_i-1}$  kleiner als  $n_i - 1$ , verbleibt im Polynom  $a_{R,0,TSi} + \dots + z^{n_i}$  nach dem Kürzen mehr als ein Linearfaktor, wie bereits erwähnt wurde. Das Ausmultiplizieren der in Gl. (46) enthaltenen Determinante führt dann gegenüber Gl. (47) zu modifizierten Beziehungen. Infolgedessen müssen im Polynom  $\tilde{c}_{R,i,1,TSj} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_j,TSj} z^{n_j-1}$  neben  $\tilde{c}_{R,i,n_j,TSj}$  auch  $\tilde{c}_{R,i,n_j-1,TSj}$  und ggf. weitere Koeffizienten null sein.

Anhand von Gl. (47) erkennt man, dass die vollständige Entkopplung durch Verschieben von Regelungseigenwerten auf invariante Nullstellen und dazu passender Vorgabe von Verkopplungsfreiheitsgraden nur dann gelingen kann, wenn zumindest die jeweils letzten einem Teilsystem zugeordneten Elemente  $\tilde{c}_{R,i,n_j,TSj}$  des transformierten Zeilenvektors  $\tilde{\mathcal{C}}_{R,i}^T$  null sind (außer das Element  $\tilde{c}_{R,i,n_i,TSi}$ ). Bei mehr als einem verbliebenen Linearfaktor nach dem Kürzen der beiden in Gl. (46) in der linken Spalte stehenden Polynome müssen auch  $\tilde{c}_{R,i,n_j-1,TSj}$  ( $j \neq i$ ) und ggf. weitere Koeffizienten null sein. Deshalb soll vorab untersucht werden, was diese Elemente bewirken. Hierzu wird zunächst die Reaktion der Regelgrößen ein Abtastintervall nach Vorgabe eines Sollwertsprungs bei auf null gesetzten Zustandsgrößenangfangswerten betrachtet. Gemäß den Gln. (1) bis (3) ergibt sich hierbei

$$\mathbf{y}_R(T) = \mathbf{C}_R \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{w}(0) \quad (48a)$$

bzw. im transformierten Koordinatensystem laut Gl. (20b)

$$\mathbf{y}_R(T) = \tilde{\mathcal{C}}_R \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{M} \mathbf{w}(0) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{R,1,n_1,TS1} & \dots & \tilde{c}_{R,1,n_p,TSp} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{c}_{R,p,n_1,TS1} & \dots & \tilde{c}_{R,p,n_p,TSp} \end{bmatrix} \mathbf{D}^* \mathbf{M} \mathbf{w}(0). \quad (48b)$$

Die Elemente  $\tilde{c}_{R,1,n_1,TS1}, \dots, \tilde{c}_{R,p,n_p,TSp}$  beeinflussen demnach maßgeblich die unmittelbare Reaktion der Regelgrößen auf einen Sollwertsprung. Diejenigen Elemente von  $\tilde{\mathcal{C}}_R$ , die gemäß Gl. (47) null sein müssen, sind in Gl. (48b) gerade die nicht auf

der Hauptdiagonale liegenden Elemente der in Gl. (48b) elementweise angegebenen Matrix. Sie muss dadurch zu einer Diagonalmatrix werden, weshalb im Entkopplungsfall auch  $\mathbf{D}^* \mathbf{M}$  – wie bereits zuvor schon angenommen – eine Diagonalmatrix sein muss, sofern nicht die Hauptdiagonalelemente  $\tilde{c}_{R,1,n_1,TS1}, \dots, \tilde{c}_{R,p,n_p,TSp}$  selbst Nullelemente sind. Liegt ein derartiger Fall derart vor, dass eine ganze Zeile  $[\tilde{c}_{R,i,n_1,TS1} \dots \tilde{c}_{R,i,n_p,TSp}]$  eine Nullzeile ist und somit  $\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{H} \mathbf{M} = \mathbf{0}^T$  gilt, dann beträgt der Gradunterschied zwischen den Polynomen  $a_{R,0,TSi} + \dots + z^{n_i}$  und  $\tilde{c}_{R,i,1,TSi} + \dots + \tilde{c}_{R,i,n_i,TSi} z^{n_i-1}$  mindestens gleich 2. Es müssen daher auch die Koeffizienten  $\tilde{c}_{R,i,n_1-1,TS1}, \dots, \tilde{c}_{R,i,n_p-1,TSp}$  (außer  $\tilde{c}_{R,i,n_i-1,TSi}$ ) null sein. Um ihren Einfluss auf die Regelgrößen zu ermitteln, wird die Regelgröße  $y_{R,i}$  zwei Abtastintervalle nach einem Sollwertsprung bei verschwindenden Zustandsgrößenanfangswerten berechnet. Man erhält hierfür nach Auswerten der Gln. (1) und (2) für  $k = 0$  und  $k = 1$  sowie nach Einsetzen von  $\mathbf{x}(2T)$  in Gl. (3) für  $k = 2$  unter Beachtung von  $\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{H} \mathbf{M} = \mathbf{0}^T$

$$y_{R,i}(2T) = \mathbf{c}_{R,i}^T (\mathbf{\Phi} - \mathbf{H} \mathbf{K}) \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{w}(0) = \mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi} \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{w}(0). \quad (49a)$$

In transformierter Darstellungsweise folgt hieraus unter Einbeziehung der Gln. (20a) und (20b)

$$\begin{aligned} y_{R,i}(2T) &= \tilde{\mathbf{c}}_{R,i}^T \tilde{\mathbf{\Phi}} \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{M} \mathbf{w}(0) \\ &= \left[ \tilde{c}_{R,i,1,TS1} \dots \tilde{c}_{R,i,n_i-1,TS1} \ 0 \dots \tilde{c}_{R,i,1,TSp} \dots \tilde{c}_{R,i,n_p-1,TSp} \ 0 \right] \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ 1 & & 0 \\ -a_{R,n_1-1,TS1} & \dots & -p_{F,1,n_p,TSp} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ -p_{F,p,1,TS1} & \dots & -a_{R,n_p-1,TSp} \end{bmatrix} \mathbf{D}^* \mathbf{M} \mathbf{w}(0) = [\tilde{c}_{R,i,n_1-1,TS1} \dots \tilde{c}_{R,i,n_p-1,TSp}] \mathbf{D}^* \mathbf{M} \mathbf{w}(0). \end{aligned} \quad (49b)$$

Demnach sind die Elemente  $\tilde{c}_{R,i,n_1-1,TS1}, \dots, \tilde{c}_{R,i,n_p-1,TSp}$  entscheidend für den Wert des Regelgrößenvektors zwei Abtastintervalle nach Aufschalten eines Sollwertsprungs verantwortlich. Sollten auch sie alle null sein, kann das geschilderte Verfahren entsprechend fortgesetzt werden. Die erste auf diese Weise ermittelte nicht verschwindende Regelgröße  $y_{R,i}$  ist per Definition  $y_{R,i,\delta_i}$ , wobei  $\delta_i$  die Differenzordnung der Regelgröße  $y_{R,i}$  bezeichnet. Für sie gilt dann

$$y_{R,i}(\delta_i) = \mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H} \mathbf{M} \mathbf{w}(0). \quad (50a)$$

In transformierter Darstellung ergibt sich entsprechend

$$y_{R,i}(\delta_i) = \left[ \tilde{c}_{R,i,n_i-\delta_i+1,TS1} \dots \tilde{c}_{R,i,n_p-\delta_i+1,TSp} \right] \mathbf{D}^* \mathbf{M} \mathbf{w}(0). \quad (50b)$$

Um zu erreichen, dass der Führungsgrößenvektor  $\mathbf{w}(0)$  in Gl. (50b)  $y_{R,i}(\delta_i)$  nur mit seinem  $i$ -ten Element beeinflusst, muss der darin elementweise angegebene Zeilenvektor bei angenommener Diagonalform von  $\mathbf{D}^* \mathbf{M}$  proportional zum Einheitszeilenvektor  $\mathbf{e}_i^T$  sein. Zusammen mit Gl. (50a) ist somit für beliebige Sollwerte die Forderung

$$\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H} = \tilde{c}_{R,i,n_i-\delta_i+1,TSi} \mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^* \quad (51a)$$

zu erfüllen. Hierbei kann davon ausgegangen werden, dass  $\tilde{c}_{R,i,n_i-\delta_i+1,TSi}$  ungleich null ist, da ja gerade der Fall  $y_{R,i}(\delta_i T) \neq$

0 betrachtet wurde und demzufolge gemäß Gl. (50b) für  $\mathbf{D}^* \mathbf{M}$  als Diagonalmatrix  $\tilde{c}_{R,i,n_i-\delta_i+1,TSi} \neq 0$  gelten muss. Des Weiteren wurde  $\tilde{c}_{R,i,n_i-\delta_i+1,TSi}$  als Koeffizient bei der höchsten Potenz von  $z$  zu Beginn des Abschnitts 5 bereits auf den Wert 1 festgelegt. Weil außerdem aus Gl. (11)  $\mathbf{e}_i^T \mathbf{D}^* = \mathbf{t}_{1,TSi}^T \mathbf{\Phi}^{n_i-1} \mathbf{H}$  hervorgeht, muss schließlich

$$\mathbf{t}_{1,TSi}^T \mathbf{\Phi}^{n_i-1} \mathbf{H} = \mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H} \quad (51b)$$

gelten. Aufgrund von Gl. (25) sowie dem Umstand, dass im Spaltenblock  $\mathbf{\Phi}^{n_i-1} \mathbf{H}$  gerade diejenigen Spalten in  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  enthalten sind, denen auf der rechten Seite von Gl. (25) die linksbündig ersten Elemente von  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^T$  entsprechen, folgt die Erkenntnis, dass die linksbündig ersten Elemente von  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^T$  mit den Elementen von  $\overline{\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H}}$  übereinstimmen müssen, wenn  $\overline{\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H}}$  ein Zeilenvektor ist, der in der gleichen Reihenfolge diejenigen Elemente von  $\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H}$  enthält, die sich in Spalten befinden, die denjenigen entsprechen, die von  $\mathbf{\Phi}^{n_i-1} \mathbf{H}$  nach  $\bar{\mathbf{Q}}_S$  übernommen wurden.

Sind nach der obigen Festlegung der linksbündig ersten Elemente von  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^T$  noch weitere zu bestimmen, so kann im Grundsatz erneut die zu Beginn des Abschnitts 5 skizzierte Vorgehensweise angewandt werden. Es muss lediglich  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^T$  gemäß

$$\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^T = \left[ \overline{\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H}} \quad \bar{\mathbf{q}}_{TSi}^{\prime T} \right] \quad (52)$$

in die zwei Teilzeilenvektoren  $\overline{\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H}}$  und  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^{\prime T}$  aufgeteilt und diese Darstellungsweise in Gl. (36) eingesetzt werden. Mit

$$\mathbf{X}_{TSi} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{a,TSi} \\ \mathbf{X}_{b,TSi} \end{bmatrix} \quad (53)$$

und an die Spaltenzahl von  $\overline{\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H}}$  und  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^{\prime T}$  angepasster Zeilenzahl von  $\mathbf{X}_{a,TSi}$  und  $\mathbf{X}_{b,TSi}$  ergibt sich daraus der in Gl. (36) maßgeblich vorkommende Term

$$\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^T \mathbf{X}_{TSi} \mathbf{N}_{TSi} - \mathbf{c}_{R,i}^T = \bar{\mathbf{q}}_{TSi}^{\prime T} \mathbf{X}_{b,TSi} \mathbf{N}_{TSi} - (\mathbf{c}_{R,i}^T - \overline{\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H}} \mathbf{X}_{a,TSi} \mathbf{N}_{TSi}). \quad (54)$$

Die weitere Vorgehensweise folgt den sich an Gl. (36) anschließenden Schritten. Es muss dort lediglich  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^T$  durch  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^{\prime T}$ ,  $\mathbf{X}_{TSi}$  durch  $\mathbf{X}_{b,TSi}$  und  $\mathbf{c}_{R,i}^T$  durch  $\mathbf{c}_{R,i}^T - \overline{\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H}} \mathbf{X}_{a,TSi} \mathbf{N}_{TSi}$  ersetzt werden. Als Resultat stellt sich entsprechend Gl. (37)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_{TSi}^{\prime T} &= (\mathbf{c}_{R,i}^T - \overline{\mathbf{c}_{R,i}^T \mathbf{\Phi}^{\delta_i-1} \mathbf{H}} \mathbf{X}_{a,TSi} \mathbf{N}_{TSi}) \mathbf{G}_{TSi} \mathbf{N}_{TSi}^T \mathbf{X}_{b,TSi}^T \cdot \\ &\quad \cdot (\mathbf{X}_{b,TSi} \mathbf{N}_{TSi} \mathbf{G}_{TSi} \mathbf{N}_{TSi}^T \mathbf{X}_{b,TSi}^T)^{-1}; \quad i = 1, \dots, p \quad (55) \end{aligned}$$

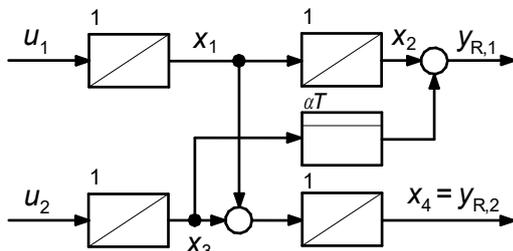
ein. Wegen der positiven Definitheit von  $\mathbf{G}_{TSi}$  und der aus  $\bar{\mathbf{Q}}_S^{-1}$  herrührenden Zeilenregularität von  $\mathbf{X}_{b,TSi}$  ist der Matrixterm  $\mathbf{X}_{b,TSi} \mathbf{N}_{TSi} \mathbf{G}_{TSi} \mathbf{N}_{TSi}^T \mathbf{X}_{b,TSi}^T$  bei angenommenem Höchststrang von  $\mathbf{N}_{TSi}$  positiv definit, so dass es sich bei  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^{\prime T}$  um eine Minimumstelle handelt (vgl. die Aussage im Anschluss an Gl. (38)). Das Einsetzen von  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^{\prime T}$  in Gl. (52) und des daraus hervorgehenden Zeilenvektors  $\bar{\mathbf{q}}_{TSi}^T$  in Gl. (27) liefert schließlich den gesuchten Transformationsmatrixzeilenvektor  $\mathbf{t}_{1,TSi}^T$ , aus dem – angewandt auf alle Teilsysteme – über Gl. (7) schließlich die gesamte Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  und über Gl. (22a) im Zusammenspiel mit der Festlegung der Verkopplungsfreiheitsgrade gemäß Gl. (47) oder vergleichbarer Beziehungen sowie mit den Koeffizienten der charakteristischen Polynome der Teilsysteme die Reglermatrix hervorgeht.

Zusammenfassend lässt sich aus den obigen Varianten zur Führungsentkopplung die folgende Strategie ableiten: Zunächst wird

mithilfe der Untersuchungen um Gl. (37)  $\bar{q}_{TSi}^T$  bestimmt und so im Zusammenspiel mit den Gln. (7), (22a) und (27) versucht,  $\tilde{C}_R$  auf Blockdiagonalgestalt zu bringen. Gelingt dies nicht, wird der Weg zur Entkopplung über die Vorgabe der Verkopplungsfreiheitsgrade entsprechend Gl. (47) gesucht. Zuvor wird aber  $\bar{q}_{TSi}^T$  unter Verwendung der Gln. (52) und (55) erneut berechnet und damit  $\tilde{C}_R$  nochmals bestimmt. Hätte bereits die erste Berechnungsvariante für  $\tilde{C}_R$  zu einer Blockdiagonalstruktur geführt, hätte diese Lösung bereits das mit den Gln. (52) und (55) erzielbare Ergebnis eingeschlossen. Wäre sie hinsichtlich einer vollständigen Entkopplung jedoch nicht erfolgreich gewesen, hätte sich ein Resultat einstellen können, das für eine näherungsweise Entkopplung möglicherweise besser geeignet ist. Die Variante über die Gln. (52) und (55) lässt dagegen die Möglichkeit offen, über die Verkopplungsfreiheitsgrade das Entkopplungsziel noch vollständig zu erreichen. Gelingt auch das nicht, kann zur vollständigen Entkopplung die Methode nach *Falb* und *Wolovich* mit ihren etwas weitergehenden Einschränkungen bezüglich der Platzierung von Regelungseigenwerten auf invariante Nullstellen eingesetzt werden. Falls diese Einschränkungen bei der konkret zu regelnden Strecke zu keinen Nachteilen führen, hätte man diese Methode bereits als erstes Verfahren auswählen können. Gelingt auch damit keine vollständige Führungsentkopplung, existiert kein Zustandsregler mit konstanter Zustandsrückführung, der diese Aufgabe lösen kann. Man muss sich dann mit einer angenäherten Führungsentkopplung zufriedengeben, wie sie z. B. auf der Basis von Gl. (37) angegangen wird. Alternativ wäre noch ein Zustandsregler mit dynamischer Rückführung möglich, wie er beispielsweise in [18] vorgeschlagen wurde. Auch ein dynamischer Vorfilter wäre denkbar. Weil hierauf jedoch nicht der Fokus dieses Beitrags liegt, werden in ihm diese Möglichkeiten nicht behandelt.

## 6 Beispiel

Zur Illustration der vorangehenden Erläuterungen soll das nachfolgende akademische Beispiel vierter Ordnung dienen, das zwei Stellgrößen ( $u_1, u_2$ ), zwei Regelgrößen ( $y_{R,1}, y_{R,2}$ ) und vier Zustandsgrößen ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) enthält. Die Abbildung 1 zeigt das zugehörige Strukturbild. Die betrachtete Regelstrecke soll zeitdiskret mit der Abtastzeit  $T$  geregelt werden. Zwei Regelungseigenwerte sind nach  $z_{R,1/2} = 0$  und zwei weitere nach  $z_{R,3/4} = 0,5$  zu verschieben. Um hierbei verschiedene Entkopplungsfälle beleuchten zu können, wird der reelle Parameter  $\alpha$  eingeführt.



**Abb. 1:** Strukturbild der Beispielregelstrecke

Das dynamische Verhalten der Regelstrecke wird durch die zeitdiskreten Systemmatrizen

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T & 0 & T & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} T & 0 \\ \frac{T^2}{2} & 0 \\ 0 & T \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix}, \quad C_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

beschrieben. Wegen  $C_{R,1}^T H \neq 0^T$  und  $C_{R,2}^T H \neq 0^T$  ergeben sich für die beiden Regelgrößen die Differenzordnungen  $\delta_1 = \delta_2 = 1$ . Mit der aus [15] stammenden und auf zeitdiskrete Systeme übertragenen Entkopplungsreglerentwurfsvorschrift erhält man zwar eine Reglermatrix, die  $\delta_1 + \delta_2 = 2$  der vier Regelungseigenwerte an gewünschte Positionen verschiebt. Die anderen beiden sind im Fall  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  allerdings an invariante Nullstellen gebunden, die bei  $\eta_1 = -1$  und  $\eta_2 = -\frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}$  liegen. Für  $\alpha = \frac{1}{2}$  existiert dagegen nur die invariante Nullstelle  $\eta_1 = -1$ . Das auf diese Weise geregelte System wäre somit für  $\alpha \geq 0$  mit Sicherheit instabil. Selbst wenn die Regelstrecke aus Abbildung 1 mit einem zeitkontinuierlichen Zustandsregler gemäß [15] geregelt werden würde, ergäbe sich für  $\alpha \neq 0$  und den dann geltenden Regelgrößendifferenzordnungen  $\delta_1 = 1$  und  $\delta_2 = 2$  die invariante Nullstelle  $\eta_1 = \frac{1}{\alpha T}$ . Infolgedessen würde auch der zeitkontinuierliche Entkopplungsreglerentwurf auf der Basis von [15] für  $\alpha > 0$  wegen der Bindung eines Regelungseigenwerts an  $\eta_1$  auf ein instabiles System führen. Geht man dagegen beim zeitdiskreten Reglerentwurf so vor, wie es in den Abschnitten 3 bis 5 erläutert wurde, dann wird zunächst die Steuerbarkeitsmatrix

$$Q_S = \begin{bmatrix} T & 0 & T & 0 & x & x & x & x \\ \frac{T^2}{2} & 0 & \frac{3T^2}{2} & 0 & x & x & x & x \\ 0 & T & 0 & T & x & x & x & x \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^2}{2} & \frac{3T^2}{2} & \frac{3T^2}{2} & x & x & x & x \end{bmatrix}$$

bestimmt. Die ersten vier linken Spalten von ihr sind voneinander linear unabhängig und bilden somit die Matrix  $\bar{Q}_S$ . Da in ihr zwei Spaltenvektoren der Kette  $h_1, \Phi h_1, \dots$  und ebenso viele der Kette  $h_2, \Phi h_2, \dots$  enthalten sind, resultieren daraus die Teilsystemordnungen  $n_1 = n_2 = 2$ . Damit und mit

$$\bar{q}_{TS1}^T = [\bar{q}_{1,TS1} \quad \bar{q}_{2,TS1}],$$

$$\bar{q}_{TS2}^T = [\bar{q}_{1,TS2} \quad \bar{q}_{2,TS2}],$$

$$\bar{Q}_S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2T} & -\frac{1}{T^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T^2} & \frac{3}{2T} & -\frac{1}{T^2} \\ -\frac{1}{2T} & \frac{1}{T^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T^2} & -\frac{1}{2T} & \frac{1}{T^2} \end{bmatrix}$$

folgt

$$T = \begin{bmatrix} t_{1,TS1}^T \\ t_{1,TS1}^T \Phi \\ t_{1,TS2}^T \\ t_{1,TS2}^T \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,TS1}^T X_{TS1} \\ \bar{q}_{1,TS1}^T X_{TS1} \Phi \\ \bar{q}_{1,TS2}^T X_{TS2} \\ \bar{q}_{1,TS2}^T X_{TS2} \Phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\bar{q}_{1,TS1}}{2T} & \frac{\bar{q}_{1,TS1}-\bar{q}_{2,TS1}}{T^2} & -\frac{\bar{q}_{2,TS1}}{2T} & \frac{\bar{q}_{2,TS1}}{T^2} \\ \frac{\bar{q}_{1,TS1}}{2T} & \frac{\bar{q}_{1,TS1}-\bar{q}_{2,TS1}}{T^2} & \frac{\bar{q}_{2,TS1}}{2T} & \frac{\bar{q}_{2,TS1}}{T^2} \\ -\frac{\bar{q}_{1,TS2}}{2T} & \frac{\bar{q}_{1,TS2}-\bar{q}_{2,TS2}}{T^2} & -\frac{\bar{q}_{2,TS2}}{2T} & \frac{\bar{q}_{2,TS2}}{T^2} \\ \frac{\bar{q}_{1,TS2}}{2T} & \frac{\bar{q}_{1,TS2}-\bar{q}_{2,TS2}}{T^2} & \frac{\bar{q}_{2,TS2}}{2T} & \frac{\bar{q}_{2,TS2}}{T^2} \end{bmatrix}$$

$$C^* = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1,TS1}^T & \Phi^2 \\ \mathbf{t}_{1,TS2}^T & \Phi^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\bar{q}_{1,TS1}}{2T} & \frac{\bar{q}_{1,TS1}-\bar{q}_{2,TS1}}{T^2} & \frac{3\bar{q}_{2,TS1}}{2T} & \frac{\bar{q}_{2,TS1}}{T^2} \\ \frac{3\bar{q}_{1,TS2}}{2T} & \frac{\bar{q}_{1,TS2}-\bar{q}_{2,TS2}}{T^2} & \frac{3\bar{q}_{2,TS2}}{2T} & \frac{\bar{q}_{2,TS2}}{T^2} \end{bmatrix},$$

$$D^* = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{1,TS1}^T & \Phi H \\ \mathbf{t}_{1,TS2}^T & \Phi H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{1,TS1} & \bar{q}_{2,TS1} \\ \bar{q}_{1,TS2} & \bar{q}_{2,TS2} \end{bmatrix}.$$

Unter der Annahme der Invertierbarkeit von  $D^*$  sowie mit

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}$$

lautet die Reglermatrix gemäß Gl. (27)

$$K = \begin{bmatrix} \frac{3}{2T} + \frac{5\bar{q}_{2,TS1}\bar{q}_{1,TS2}}{8T \det D^*} & \frac{1}{T^2} - \frac{3\bar{q}_{2,TS1}(\bar{q}_{2,TS2}-\bar{q}_{1,TS2})}{4T^2 \det D^*} & \frac{5\bar{q}_{2,TS1}\bar{q}_{2,TS2}}{8T \det D^*} & \frac{3\bar{q}_{2,TS1}\bar{q}_{2,TS2}}{4T^2 \det D^*} \\ -\frac{5\bar{q}_{1,TS1}\bar{q}_{1,TS2}}{8T \det D^*} & -\frac{1}{T^2} + \frac{3\bar{q}_{2,TS1}(\bar{q}_{2,TS2}-\bar{q}_{1,TS2})}{4T^2 \det D^*} & \frac{3}{2T} - \frac{5\bar{q}_{1,TS1}\bar{q}_{2,TS2}}{8T \det D^*} & \frac{1}{T^2} - \frac{3\bar{q}_{1,TS1}\bar{q}_{2,TS2}}{4T^2 \det D^*} \end{bmatrix}.$$

Mit ihr werden alle Eigenwerte trotz noch nicht festgelegter Parameter  $\bar{q}_{1,TS1}$ ,  $\bar{q}_{2,TS1}$ ,  $\bar{q}_{1,TS2}$  und  $\bar{q}_{2,TS2}$  wie gewünscht nach  $z_{R,1/2} = 0$  und  $z_{R,3/4} = 0,5$  verschoben. Um darüber hinaus die Regelgrößen voneinander zu entkoppeln, werden die Koeffizienten  $\tilde{c}_{R,1,1,TS1}$ ,  $\tilde{c}_{R,1,2,TS1}$ ,  $\tilde{c}_{R,2,1,TS2}$  und  $\tilde{c}_{R,2,2,TS2}$  entsprechend der invarianten Nullstelle  $\eta_1 = -1$  zunächst auf den gemeinsamen Wert 1 gesetzt. Die darauf basierende Auswertung von Gl. (36) führt bei der Vorgabe von Diagonalmatrizen als Gewichtungsmatrizen auf die davon unabhängigen Lösungen  $\bar{q}_{TS1}^T = \frac{T^2}{2} [1 \ 0]$  und  $\bar{q}_{TS2}^T = \frac{T^2}{2} [1 \ 1]$ . Daraus wird nun die Transformationsmatrix berechnet und deren Inverse von rechts mit  $C_R$  multipliziert, was schließlich

$$\tilde{C}_R = \begin{bmatrix} 1 + 2\alpha & 1 - 2\alpha & -2\alpha & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

liefert. Man erkennt daran zum einen, dass die Regelgröße  $y_{R,2}$  vollständig aus den transformierten Zustandsgrößen des zweiten Teilsystems rekonstruiert werden kann und dass die Koeffizienten  $\tilde{c}_{R,2,1,TS2}$  und  $\tilde{c}_{R,2,2,TS2}$  nach erfolgter Optimierung tatsächlich den Wert 1 annehmen. Zum anderen ist aber auch ersichtlich, dass sich  $y_{R,1}$  nur für  $\alpha = 0$  ausschließlich aus den transformierten Zustandsgrößen des ersten Teilsystems zusammensetzt. In diesem Fall ergibt sich ebenfalls  $\tilde{c}_{R,1,1,TS1} = \tilde{c}_{R,1,2,TS1} = 1$ . Für  $\alpha \neq 0$  gilt dagegen  $\tilde{c}_{R,1,1,TS1} \neq 0$  und  $\tilde{c}_{R,1,2,TS1} \neq 0$ , weshalb auch Zustandsgrößen des zweiten Teilsystems  $y_{R,1}$  beeinflussen und somit  $y_{R,1}$  nicht führungsentkoppelt ist.

Für die resultierende Regler- und Vorfiltermatrix folgt aus der Optimierung

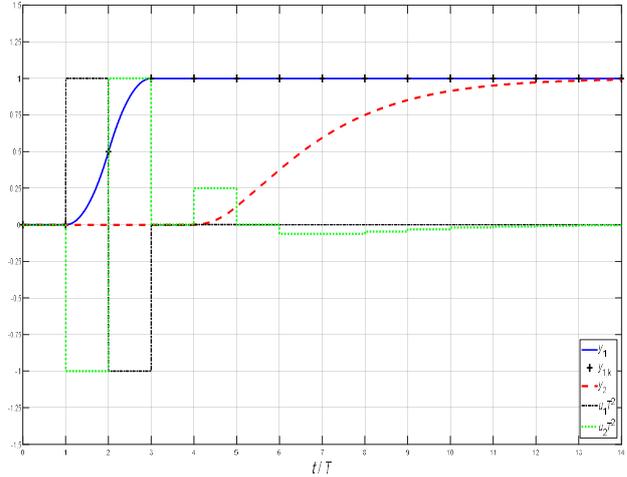
$$K = \begin{bmatrix} \frac{3}{2T} & \frac{1}{T^2} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{8T} & -\frac{1}{T^2} & \frac{7}{8T} & \frac{1}{4T^2} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \frac{1}{T^2} & 0 \\ -\frac{1}{T^2} & \frac{1}{4T^2} \end{bmatrix}.$$

Daraus wiederum ergibt sich zusammen mit den zeitdiskreten Systemmatrizen und der Vorfiltermatrix gemäß Gl. (23) die Führungsübertragungsmatrix

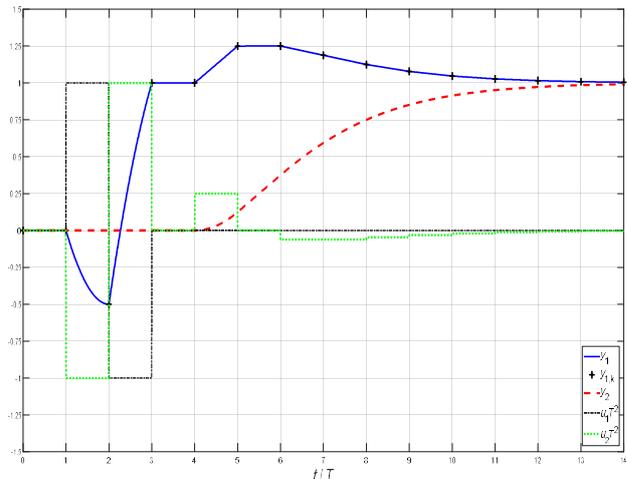
$$G_{w,z}(z) = C_R (zI - \Phi + HK)^{-1} HM = \begin{bmatrix} \frac{(1-2\alpha)z+1+2\alpha}{2z^2} & \frac{\alpha(z-1)}{4\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \\ 0 & \frac{z+1}{8\left(z-\frac{1}{2}\right)^2} \end{bmatrix}.$$

Auch hieran ist im Fall  $\alpha \neq 0$  die nicht erfolgte vollständige Führungsentkopplung der Regelgröße  $y_{R,1}$  von  $y_{R,2}$  anhand des nicht verschwindenden Elements  $G_{w,1,2,z}(z)$  ersichtlich.

Zur Veranschaulichung des mit der ermittelten Reglermatrix erzielbaren Regelverhaltens zeigen die Abbildungen 2a und 2b das Führungsverhalten der Regelgrößen  $y_{R,1}$  und  $y_{R,2}$  sowie die zugehörigen Stellgrößenverläufe, wenn zu unterschiedlichen Zeitpunkten jeweils ein Einheitssollwertsprung in den Führungsgrößen  $w_1$  (bei  $T$ ) und  $w_2$  (bei  $4T$ ) erfolgt. Hierbei wird in Abbildung 2a der Fall  $\alpha = 0$  angenommen, während Abbildung 2b auf dem Parameter  $\alpha = 1$  basiert.



**Abb. 2a:** Sprungantworten und Stellgrößenverläufe der Beispielregelung bei konstantem Vorfilter und konstanter Zustandsrückführung mit vollständiger Führungsentkopplung für  $\alpha = 0$



**Abb. 2b:** Sprungantworten und Stellgrößenverläufe der Beispielregelung bei konstantem Vorfilter und konstanter Zustandsrückführung mit unvollständiger Führungsentkopplung für  $\alpha = 1$

Wie aus den Zeitverläufen hervorgeht, wird in Abbildung 2a mit der gewählten konstanten Zustandsrückführung für  $\alpha = 0$  die vollständige Entkopplung des Führungsverhaltens erreicht. Bei Abbildung 2b gelingt eine vollständige Führungsentkopplung wegen  $\alpha \geq 0$  nicht.

Um zu veranschaulichen, wie konkret vorgegangen werden muss, wenn die Führungsentkopplung mit konstanter Zustandsrückführung nur über das Verschieben von Regelungseigenwerten auf invariante Nullstellen gelingt, wird der Parameter  $\alpha$  auf den Wert  $-\frac{1}{3}$  gesetzt. Für die invarianten Nullstellen gilt somit  $\eta_1 = -1$  und  $\eta_2 = -0,2$ , d. h. eine von ihnen liegt innerhalb des

Stabilitätsbereichs und eine am Stabilitätsrand. Aufgrund der Aussagen unmittelbar im Anschluss an Gl. (51b) erhält man bei der nun betrachteten Vorgehensweise für die Zeilenvektoren  $\bar{q}_{TS1}^T$  und  $\bar{q}_{TS2}^T$  die Ergebnisse

$$\bar{q}_{TS1}^T = \mathbf{c}_{R,1}^T \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & -\frac{T^2}{3} \end{bmatrix},$$

$$\bar{q}_{TS2}^T = \mathbf{c}_{R,2}^T \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Über die daraus ermittelbare Matrix  $\mathbf{T}$  ergibt sich dann die transformierte Ausgangsmatrix

$$\tilde{\mathbf{C}}_R = \mathbf{C}_R \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hieraus lassen sich nun die Koeffizienten  $\tilde{c}_{R,1,1,TS2} = \frac{4}{5}$  und  $\tilde{c}_{R,1,n_2,TS2} = \tilde{c}_{R,2,1,TS1} = \tilde{c}_{R,2,n_1,TS1} = 0$  ablesen. Die Regelgröße  $y_{R,2}$  ist somit mittels der bisherigen Berechnungen, d. h. ohne die von Null abweichende Vorgabe der Verkopplungsfreiheitsgrade  $p_{F,2,1,TS1}$  und  $p_{F,2,n_1,TS1}$ , bereits führungsentkoppelt. Die Verschiebung eines Regelungseigenwertes des zweiten Teilsystems auf eine invariante Nullstelle ist daher nicht erforderlich. Für  $y_{R,1}$  trifft dies wegen  $\tilde{c}_{R,1,1,TS2} \neq 0$  nicht zu. Allerdings ist die Voraussetzung für eine derartige Verschiebung wegen  $\tilde{c}_{R,1,2,TS2} = 0$  erfüllt. Die Anwendung von Gl. (47) liefert dann mit  $\bar{z}_{R,TS1} = 0$  die Ergebnisse

$$p_{F,1,1,TS} = 0, \quad p_{F,1,2,TS2} = \frac{4}{5}$$

und somit wegen  $z_{R,1} = 0, z_{R,2} = -\frac{1}{5}, z_{R,3} = z_{R,4} = \frac{1}{2}$  die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -1 \end{bmatrix}.$$

Darüber hinaus können aus  $\mathbf{T}$  gemäß den Gln. (11) und (17) noch die Matrizen

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \frac{3T}{4} & \frac{5}{6} & -\frac{T}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{3T}{4} & 0 & \frac{3T}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & -\frac{T^2}{3} \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^2}{2} \end{bmatrix}$$

berechnet werden. All diese Ergebnisse in die Gln. (22a) und (23) eingesetzt führen schließlich auf die Reglermatrix

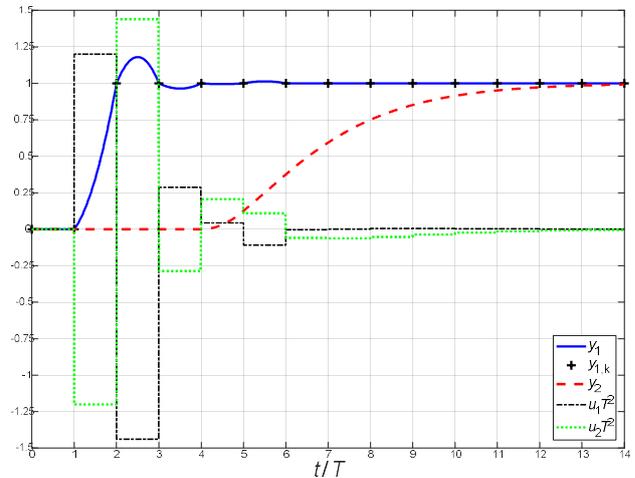
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{31}{20T} & \frac{6}{5T^2} & -\frac{1}{20T} & \frac{1}{10T^2} \\ -\frac{6}{40T} & -\frac{6}{5T^2} & \frac{37}{40T} & \frac{3}{20T^2} \end{bmatrix}$$

sowie die Vorfiltermatrix

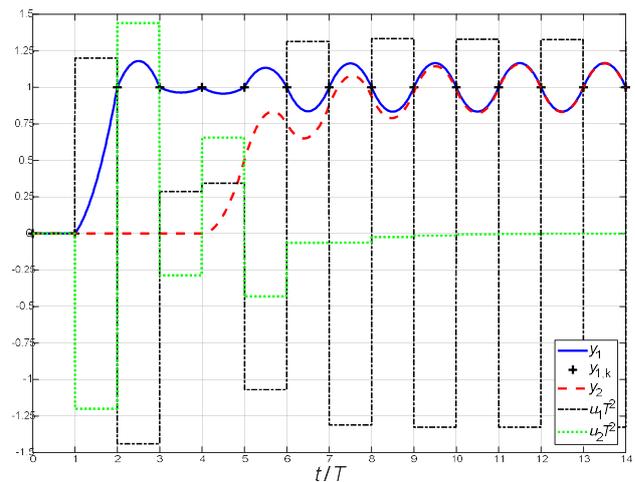
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5T^2} & \frac{1}{20T^2} \\ -\frac{6}{5T^2} & \frac{3}{20T^2} \end{bmatrix}.$$

Um einen Eindruck zu erhalten, welches Regelverhalten mit dem so entworfenen Regler erzielbar ist, zeigt das Bild 2c wiederum das Einschwingverhalten beider Regelgrößen sowie der zugehörigen Stellgrößen bei Vorgabe derselben Sollwertsprünge wie

zuvor. Als Gegensatz dazu ist im Bild 2d der Verlauf der Regel- und Stellgrößen dargestellt, wenn der Reglerentwurf mit der zeitdiskreten Variante der Entkopplungsmethode von *Falb* und *Wolovich* erfolgt.



**Abb. 2c:** Sprungantworten und Stellgrößenverläufe der Beispielregelung bei konstantem Vorfilter und konstanter Zustandsrückführung mit Führungsentkopplung durch Verschieben eines Regelungseigenwertes auf eine invariante Nullstelle und dazu passender Vorgabe von Verkopplungsfreiheitsgraden für  $\alpha = -1/3$



**Abb. 2d:** Sprungantworten und Stellgrößenverläufe der Beispielregelung bei konstantem Vorfilter und konstanter Zustandsrückführung mit Führungsentkopplung nach *Falb* und *Wolovich* für  $\alpha = -1/3$

Wie deutlich zu erkennen ist, sind die Regelgrößen zwar in beiden Fällen führungsentkoppelt und verlaufen in den Abtastzeitpunkten entsprechend den gewählten Regelungseigenwerten. In Bild 2d ist aber in beiden Regelgrößen eine Dauerschwingung sichtbar, sobald der Sollwertsprung in der zweiten Führungsgröße erfolgt ist. Man erkennt sie allerdings in den abgetasteten Regelgrößenwerten nicht. Um das noch besser hervorzuheben, wurden bei den Funktionswerten von  $y_{R,1}$  die abgetasteten Werte durch Kreuze markiert. Im Verlauf der Stellgröße  $u_1$  ist die genannte Dauerschwingung jedoch auch anhand der zeitdiskreten Vorgabewerte sichtbar. Der Grund für die sich einstellende Dau-

erschwingung liegt darin, dass verfahrensbedingt einer der Regelungseigenwerte auf die invariante Nullstelle  $\eta_1 = -1$  geschoben wurde und somit instabil ist.

## 6 Zusammenfassung

Im Beitrag wurde für die Ackermann'sche Formel zur Polvorgabe bei Mehrgrößensystemen für den zeitdiskreten Fall eine Erweiterung vorgestellt, durch die bisher dort nicht erschlossene Freiheitsgrade geschaffen wurden. Es wird darin gezeigt, wie sie zielgerichtet zur Führungsentkopplung einsetzbar sind. Die beschriebene Methode basiert auf einer teilsystemorientierten Zustandsgrößentransformation und erzielt die Entkopplung durch Rekonstruktion der Zeilenvektoren der Ausgangsmatrix aus geeigneten Zeilenvektoren der Transformationsmatrix, soweit dies möglich ist. Des Weiteren wurde gezeigt, wie mit der erweiterten Ackermann'schen Formel die Entkopplung durch Verschieben von Regelungseigenwerten auf invariante Nullstellen gelingen kann.

## Anhang

Damit die in Gl. (7) aufgeführte Transformationsmatrix zur gewünschten Zustandsgrößentransformation führt, muss  $\mathbf{T}$  regulär sein. Am einfachsten weist man das analog zur in [9] beschriebenen Vorgehensweise für den Eingrößenfall nach. Demzufolge ist für die lineare Unabhängigkeit der Zeilenvektoren von  $\mathbf{T}$  zu fordern, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} &\mu_{1,TS1} \mathbf{t}_{1,TS1}^T + \mu_{2,TS1} \mathbf{t}_{1,TS1}^T \Phi + \dots + \mu_{n_1,TS1} \mathbf{t}_{1,TS1}^T \Phi^{n_1-1} + \dots + \\ &+ \mu_{1,TSp} \mathbf{t}_{1,TSp}^T + \mu_{2,TSp} \mathbf{t}_{1,TSp}^T \Phi + \dots + \mu_{n_p,TSp} \mathbf{t}_{1,TSp}^T \Phi^{n_p-1} = \mathbf{0}^T \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

nur eine Lösung mit verschwindenden Koeffizienten  $\mu_{1,TS1}, \dots, \mu_{n_p,TSp}$  besitzt. Um das zu zeigen, wird Gl. (A.1) zunächst von rechts mit  $\mathbf{H}$  multipliziert. Unter Berücksichtigung der Gln. (10b), (10c) und (11) folgt daraus die vektorielle Beziehung

$$[\mu_{n_1,TS1} \ \mu_{n_2,TS2} \ \dots \ \mu_{n_p,TSp}] \mathbf{D}^* = \mathbf{0}^T. \quad (\text{A.2})$$

An ihr erkennt man, dass nur bei Invertierbarkeit der Matrix  $\mathbf{D}^*$  für die Koeffizienten  $\mu_{n_1,TS1}, \dots, \mu_{n_p,TSp}$  jeweils ausschließlich der Wert 0 als Lösung bleibt. Notwendig für die Regularität von  $\mathbf{T}$  ist somit die Invertierbarkeit von  $\mathbf{D}^*$ .

Um zu zeigen, dass auch die übrigen, in Gl. (A.1) enthaltenen Koeffizienten für  $\det \mathbf{D}^* \neq 0$  null sind, wird Gl. (A.1) von rechts mit  $\Phi \mathbf{H}$  multipliziert. Unter Beachtung des bereits vorangehenden Ergebnisses  $\mu_{n_1,TS1} = \dots = \mu_{n_p,TSp} = 0$  sowie unter der Annahme, dass in jedem Teilsystem noch mindestens ein unbestimmter Koeffizient vorhanden ist, führt das auf

$$[\mu_{n_1-1,TS1} \ \mu_{n_2-1,TS2} \ \dots \ \mu_{n_p-1,TSp}] \mathbf{D}^* = \mathbf{0}^T, \quad (\text{A.3})$$

was bei invertierbarem  $\mathbf{D}^*$  erneut nur 0 als Lösung für die gesuchten Koeffizienten zur Folge hat. Diese Vorgehensweise kann solange sukzessive mit zunehmender Potenz  $j$  im zu multiplizierenden Matrixprodukt  $\Phi^j \mathbf{H}$  fortgeführt werden, bis alle Koeffizienten von einem Teilsystem oder ggf. von mehreren zugleich ermittelt sind. Haben die Teilsysteme unterschiedliche Ordnungen, dann reduziert sich für diejenigen Teilsysteme, deren Koeffizienten noch nicht vollständig bestimmt sind, die Anzahl der im nächsten Schritt zu ermittelnden Koeffizienten. Weil aber die Gleichungszahl mit  $p$  unverändert bleibt, würde es sich um ein überbestimmtes Gleichungssystem handeln. Offensichtlich ist es aber lösbar mit dem Resultat, dass wiederum alle

gesuchten Koeffizienten null sind. Um zu zeigen, dass es sich in Verbindung mit den bereits bekannten Gleichungskoeffizienten um die einzige Lösung handelt, wird die zugrundeliegende vektorielle Gleichung additiv um so viele Nullzeilenvektoren  $\mu_{n_v,TSv} \mathbf{t}_{1,TSv}^T \Phi^{n_v-1} \mathbf{H}$  ergänzt, dass insgesamt wieder  $p$  Koeffizienten zu bestimmen sind. Daraus entsteht dann für denjenigen Iterationsschritt – nachfolgend als  $i$ -ter Iterationsschritt bezeichnet –, bei dem andernfalls erstmals die Anzahl der zu bestimmenden Koeffizienten kleiner wäre als  $p$ , die Darstellungsform

$$[\mu_{n_1,TS1} \ \dots \ \mu_{n_2-i+1,TS2} \ \dots \ \mu_{n_p-i+1,TSp}] \mathbf{D}^* = \mathbf{0}^T, \quad (\text{A.4})$$

die bei angenommener Invertierbarkeit der Matrix  $\mathbf{D}^*$  die eindeutige Lösung  $\mu_{n_1,TS1} = \dots = \mu_{n_2-i+1,TS2} = \dots = \mu_{n_p-i+1,TSp} = 0$  hat. Auch gibt es keinen Widerspruch zu einer früheren Lösung für  $\mu_{n_1,TS1}, \dots$ , da sich beide Male das Resultat 0 einstellt.

Die geschilderten Maßnahmen lassen sich sinngemäß solange fortsetzen, bis für alle Koeffizienten nachgewiesen ist, dass nur die Lösung 0 infrage kommt. Alleinige Voraussetzung hierfür ist, dass sich  $\mathbf{D}^*$  invertieren lässt.

## Literatur

1. Ackermann, J.: Entwurf durch Polvorgabe, Teil 2. Regelungstechnik 1977, S. 209 - 215
2. Ackermann, J.: Abtastregelung, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1988
3. Roppenecker, G.: Vollständige Modale Synthese linearer Systeme und ihre Anwendung zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen, Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 8, Nr. 59, Düsseldorf, VDI-Verlag, 1983
4. Roppenecker, G.: Zeitbereichsentwurf linearer Regelungen, Oldenbourg Verlag, München, 1990
5. Becker, N.; Ostertag, E.: Zur Berechnung der Zustandsrückführungsmatrix für Strecken mit mehreren Eingangsgrößen. at – Automatisierungstechnik 35 (1987), S. 214 – 215
6. Föllinger, O.: Lineare Abtastsysteme, 4. Auflage, Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1990
7. Unbehauen, H.: Regelungstechnik II, 9. Auflage, Wiesbaden, Vieweg Verlag, 2007
8. Schulz, G.; Graf, C.: Regelungstechnik 2, 3. Auflage, München, Oldenbourg Verlag, 2013
9. Föllinger, O.: Regelungstechnik, 12. Auflage, VDE Verlag, Berlin, Offenbach, 2016
10. Lunze, J.: Regelungstechnik 2, 9. Auflage, Springer Vieweg Verlag, Berlin, Heidelberg, 2016
11. Luenberger, D.G.: Canonical Forms for Linear Multivariable Systems. IEEE Transactions on Automatic Control 12 (1967), S. 290-293
12. Karbassi, S.M.; Bell, D.J.: New method of parametric eigenvalue assignment in state feedback control. IEE Proc. Control Theory Appl. 141 (1994), S. 223-226
13. Khodaverdian, S.: Vollständige und teilweise Ein-/Ausgangsentkopplung: Ein Transformationsansatz. at – Automatisierungstechnik 2016, S. 961 - 976

14. Brunowsky, P.: A classification of linear controllable systems. In *Kybernetica* 6 (1970), S. 173 – 188
15. Falb, P.L.; Wolovich, W.A.: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 12 (1967), S. 651-659
16. Nuß, U.: Ein einfacher Zustandsreglerentwurf im Zuge der Erweiterung der Systemstruktur um Reglerintegratoren und Rechenzeiten. *at – Automatisierungstechnik* 64 (2016), S. 29 – 40
17. Nuß, U.: Stabilitätsverhalten von zweistufig entworfenen zeitdiskreten PI-Zustandsreglern bei Stellgrößenbegrenzungen. *at – Automatisierungstechnik* 65 (2017), S. 705 – 717
18. Lohmann, B.: Vollständige und teilweise Führungsentkopplung im Zustandsraum, VDI Fortschrittberichte, VDI Verlag, Düsseldorf, 1991

## Autoreninformationen



### **Prof. Dr.-Ing. habil. Uwe Nuß**

Hochschule Offenburg, Fakultät Elektrotechnik, Medizintechnik und Informatik, Badstraße 24, 77652 Offenburg, Germany

**[uwe.nuss@hs-offenburg.de](mailto:uwe.nuss@hs-offenburg.de)**

Prof. Dr. Nuß lehrt und forscht an der Hochschule Offenburg. Er vertritt dort an der Fakultät Elektrotechnik, Medizintechnik und Informatik die Lehrgebiete elektrische Antriebstechnik, Leistungselektronik und Regelungstechnik. Hauptarbeitsgebiete: Hochdynamische Regelung elektrischer Antriebe, zeitdiskrete Regelungen