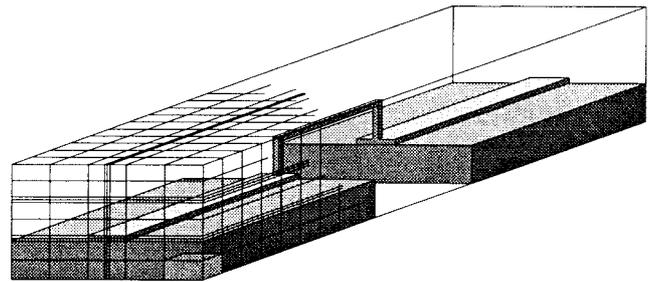


# Feldnumerische Simulation kreiszylindrischer Strukturen bei hohen Frequenzen

Dipl.-Ing. (FH) Frank Hamann,  
Prof. Dr.-Ing. Andreas Christ  
Fachhochschule Offenburg, Badstr. 24, 77652 Offenburg  
Tel. 0781/205-130, Fax 0781/205-111

Die hochfrequente, feldnumerische Analyse mit der Finite-Differenzen Methode erfordert die Diskretisierung der zu untersuchenden Struktur in einem nichtäquidistanten Gitter. Vorschriften zur Diskretisierung kreiszylindrischer Strukturen wie sie z.B. bei Durchkontaktierungen auftreten, werden untersucht und eine optimierte Lösung vorgestellt.



## 1. Einführung

Die quantitative Analyse der physikalischen Wechselwirkung zwischen betrachteter Struktur und elektromagnetischen Feldern innerhalb einer Strukturberandung erfordert zum einen ein die Wirklichkeit hinreichend genau beschreibendes Modell, zum anderen die mathematische Analyse dieses Modells. Die Modellbildung erfolgt bei der Finite-Differenzen Methode durch Zuordnung eines Gleichungssystems, das die elektrischen Verhältnisse hinreichend genau beschreibt, zu jeweiliger Strukturgeometrie. Die Analyse erfolgt numerisch.

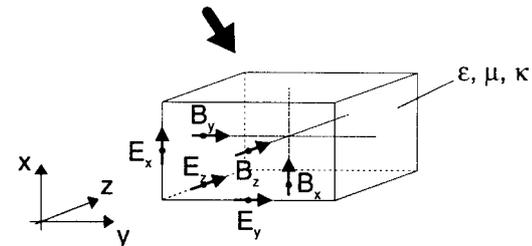


Abb. 1 Zerlegung der Struktur in Elementarquader, Verwendung eines 3-dim. nicht-äquidistanten kartesischen Gitters

### 1.1 Kurze Beschreibung der verwendeten feldnumerischen Simulationsmethode

Neben feldnumerischen Simulationsverfahren wie Integralgleichungsmethode oder Finite-Elemente Methode [1] auf der Grundlage tetraederförmiger Zellen erwies sich die Finite-Differenzen Methode auf der Grundlage quaderförmiger Zellen [2], [3], [4] als effektives Mittel zur Analyse passiver HF-Strukturen [5], [6], [7]. Die Gesamtstruktur wird hierbei diskretisiert, d. h. in Elementarquader i. a. nicht-äquidistanter Abmessungen und variabler Materialfüllungen eingeteilt (s. Abb. 1). Innerhalb jedes Elementarquaders wird jedoch homogene Materialfüllung vorausgesetzt.

Die komplexen Maxwell'schen Gleichungen in Integralform werden auf jeden Elementarquader angewandt. Durch Annahme einer geeigneten Anzahl linear unabhängiger Erregungen an den Toren und Berücksichtigung der metallischen Umhüllung der Struktur ergibt sich je ein Randwertproblem für die Berechnung des elektrischen Feldes innerhalb der Strukturberandung. Unter Kenntnis des elektrischen Feldes innerhalb der Strukturberandung und der für die Moden geltenden Orthogonalitätsbedingung läßt sich der auf Mode und Tor bezogene Reflexionsfaktor bestimmen. Hieraus ergeben sich schließlich die Streumatrixkoeffizienten je untersuchtem Frequenzpunkt :

$$(S) = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & S_{kl} & \\ \cdot & & & \\ S_{n1} & \dots & & S_{nn} \end{pmatrix}$$

## 2. Feldnumerische Analyse kreiszylindrischer Strukturen

Unter Verwendung der Finite-Differenzen Methode auf der Grundlage quaderförmiger Zellen ergibt sich die Schwierigkeit der Approximation kreiszylindrischer Strukturen wie sie z. B. bei Durchkontaktierungen von Multi-Layer-Platinen auftreten. Ziel aller nachfolgenden Untersuchungen ist demnach, eine Kreiszyylinder-Diskretisierungsvorschrift zu finden, die bei kleinstmöglichem Kreiszyylinder-Approximationsaufwand (= kleinstmögliche Anzahl an Elementarquadern zur Kreiszyylinderapproximation) zu wahren feldnumerischen Ergebnissen (= Streumatrizen) führt im Rahmen der Gesamtstrukturgenauigkeit. Dies entspricht der Suche nach einer idealen Kreiszyylinder-Diskretisierungsvorschrift.

### 2.1 Kreiszyllindrische Struktur

Die für die nachfolgenden Untersuchungen verwendete kreiszylindrische Struktur ist in Abb. 2 dargestellt. Es handelt sich hierbei um einen dielektrischen Resonator hoher Dielektrizitätszahl —  $\epsilon_r = 50.0$  — in Kreiszyylinderform.

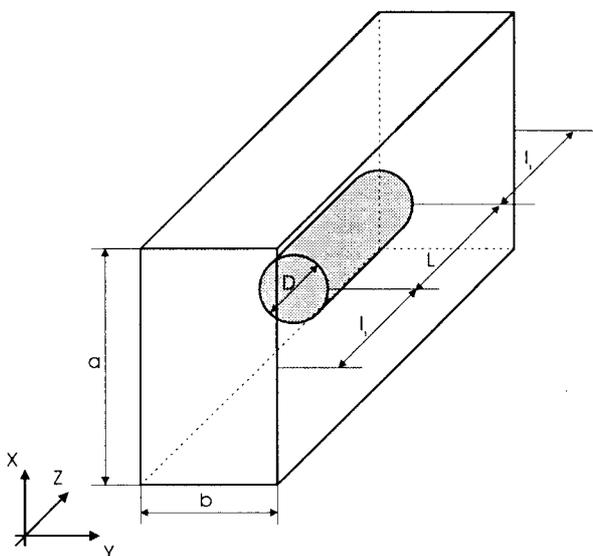
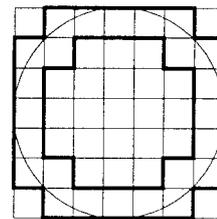


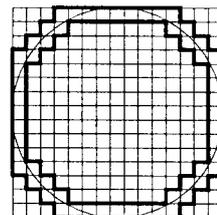
Abb. 2 Kreiszyllindrischer dielektrischer Resonator in einem Rechteckhohlleiter

### 2.2 Standard-Diskretisierungsvorschriften für kreiszylindrische Strukturen

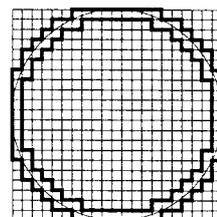
Bezüglich des in Abb. 2 dargestellten kreiszylindrischen Resonators werden zwei in ihren Eigenschaften grundsätzlich unterschiedliche Diskretisierungsarten analysiert: Relativ zum Kreis eingeschriebene und umschriebene Diskretisierungsarten mit steigender Anzahl an Unterteilungen (2D-Betrachtung, s. Abb. 3 a, b, c).



(a) Grundraaster : 7 Untert., Approximationsgitter n = 3 Untert.  
 $\Delta A/A_{\text{Kreis}} = + 16.9 \%$  (umschrieben)  
 $\Delta A/A_{\text{Kreis}} = - 45.4 \%$  (eingeschrieben)



(b) Grundraaster : 15 Untert., Approximationsgitter n = 7 Untert.,  
 $\Delta A/A_{\text{Kreis}} = + 13.7 \%$  (umschrieben)  
 $\Delta A/A_{\text{Kreis}} = - 18.0 \%$  (eingeschrieben)



(b) Grundraaster : 21 Untert., Approximationsgitter n = 11 Untert.,  
 $\Delta A/A_{\text{Kreis}} = + 7.7 \%$  (umschrieben)  
 $\Delta A/A_{\text{Kreis}} = - 15.4 \%$  (eingeschrieben)

Abb. 3 Darstellung der Diskretisierungsarten eingeschrieben und umschrieben mit steigender Anzahl an Unterteilungen — dargestellt ist jeweils nur der für den dielektrischen Resonator relevante Teil —,  $\Delta A/A_{\text{Kreis}}$  gibt jeweils die Flächenabweichung zur Kreisfläche an

In Abb. 3 ist je Diskretisierungsart mit steigender Anzahl an Unterteilungen des Approximationsgitters die sich stetig verbessernde Annäherung an die Kreisform ersichtlich, die beim Grenzwert einer unendlichen Anzahl an Unterteilungen exakt die Kreisform annimmt.

### 2.3 Feldnumerische Ergebnisse der Standard-Diskretisierungs-vorschriften

Die Hohlleiterabmessungen gemäß Abb. 2 werden so gewählt, daß im untersuchten Frequenzbereich nur die Grundmode ausbreitungsfähig ist. Die Struktur ist dann als elektrisches Zweitor anzusehen. Aufgrund der Symmetrie der Struktur, und der Tatsache, daß die Struktur als verlustfrei betrachtet wird, reduziert sich der Informationsgehalt der beschreibenden Streumatrix ausschließlich auf eine Größe, z. B.  $S_{11}$ . Ist weiterhin nur das Verhältnis der rück- und hinlaufenden Wirkleistungen, bezogen auf ein Tor von Interesse, so ist es ausreichend, ausschließlich z. B. die Größe  $|S_{11}|$  zu betrachten.

Das qualitative Ergebnis  $|S_{11}|(f)$  im Frequenzbereich 15 bis 25 GHz ist in Abb. 4 dargestellt.

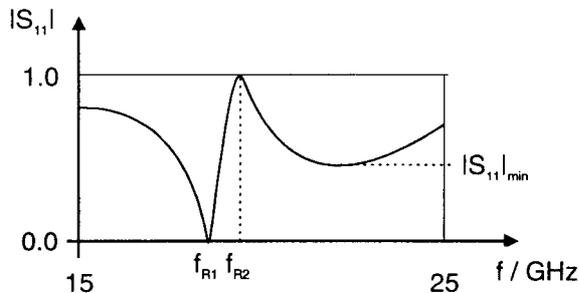


Abb. 4 Qualitative Darstellung  $|S_{11}|(f)$  bezogen auf den kreiszylindrischen Resonator aus Abb. 2, charakteristische Merkmale:  $f_{R1}$ ,  $f_{R2}$ ,  $|S_{11}|_{min}$

In Abb. 4 zeigen sich charakteristische Merkmale, die den Verlauf  $|S_{11}|(f)$  maßgeblich bestimmen. Als charakteristische Merkmale sind zu nennen:

- $f_{R1}$  : Resonanzfrequenz vom Typ  $|S_{11}| = 0$
- $f_{R2}$  : Resonanzfrequenz vom Typ  $|S_{11}| = 1$
- $|S_{11}|_{min}$  : Lokales Minimum von  $|S_{11}|$

Wird z. B. die Diskretisierungsart umschrieben auf die in Abb. 2 dargestellte kreiszylindrische Struktur angewandt, so verschiebt sich Resonanzfrequenz  $f_{R1}$  bei steigender Anzahl von Unterteilungen zu höheren Werten unter Annäherung an einen Endwert. Die Untersuchung der Abhängigkeit des Merkmals  $f_{R1}$  bei der jeweiligen Kreiszylinderdiskretisierungsart von der Anzahl der Unterteilungen  $n$  zeigt Abb. 5. Die Verläufe  $f_{R1}(n)$  und  $|S_{11}|_{min}(n)$  sind qualitativ vergleichbar.

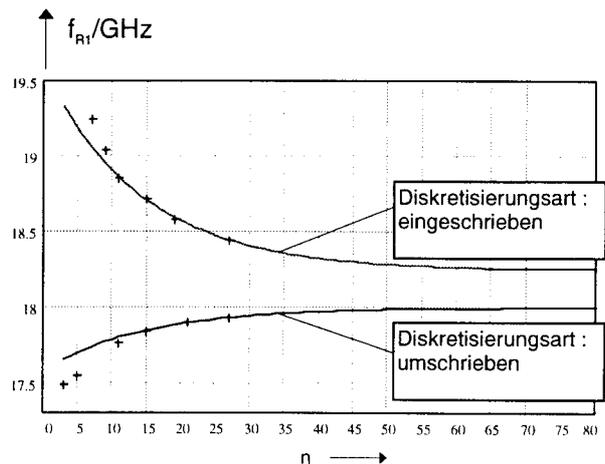


Abb.5 Darstellung  $f_{R1}(n)$  mit zugehörigen Ausgleichs-e-Funktionen, Endwerte:

$$f_{R1, \text{end, eingeschrieben}} = 18.243 \text{ GHz}$$

$$f_{R1, \text{end, umschrieben}} = 17.997 \text{ GHz}$$

Aus Abb. 5 wird ersichtlich, daß Diskretisierungsart eingeschrieben grundsätzlich zu zu hohen, Diskretisierungsart umschrieben grundsätzlich zu zu niederen Resonanzfrequenzen führt. Mit steigender Anzahl von Unterteilungen konvergieren diese jedoch gegen einen jeweiligen Endwert. Die Ursache, daß diese Endwerte nicht übereinstimmen ist darin zu sehen, daß die Simulationenpunkte bereits bei  $n = 27$  enden und zur Extrapolation eine Exponentialfunktion verwendet wurde. Tatsächlich liegen diese Punkte nicht auf einem derartigen Funktionsverlauf, auch wenn die Eigenschaft des Anstrebens eines Endwertes vorliegt. Aus diesem Grund wurden nur diejenigen Punkte zur Berechnung einer jeweiligen Ausgleichsexponentialfunktion verwendet, die möglichst in der Nähe des entsprechenden Endwertes liegen. Aufgrund der gegensätzlichen Eigenschaften der verwendeten Diskretisierungsarten (eingeschlossenes Volumen) läßt sich jedoch eine wichtige Schlussfolgerung gewinnen:

Der wahre unbekannte Wert  $f_{R1, \text{wahr}}$  liegt zwischen den Endwerten  $f_{R1, \text{end, eingeschrieben}}$  und  $f_{R1, \text{end, umschrieben}}$ . Diese stellen somit die äußeren Grenzen für den wahren Wert innerhalb eines gewissen Fehlerintervalls dar.

## 2.4 Optimierte Diskretisierungsvorschriften für kreiszylindrische Strukturen

### 2.4.1 Ansatz

Als Ansatz zum Auffinden optimierter Diskretisierungsvorschriften für kreiszylindrische Strukturen dient eine geometrisch variable Diskretisierungsvorschrift mit konstant 3 Unterteilungen (s. Abb. 6).

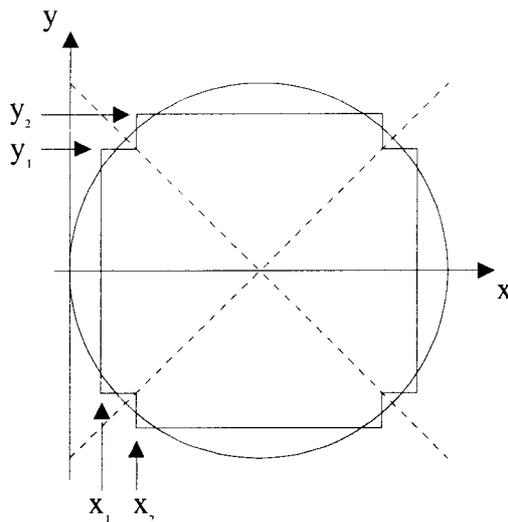


Abb. 6 Geometrisch variable Diskretisierungsvorschrift für kreiszylindrische Strukturen, 3 Unterteilungen – dargestellt ist nur der für den dielektrischen Resonator relevante Teil –

Aus Abb. 6 ergeben sich zunächst 4 Gittervariable  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , die sich unter Berücksichtigung der  $45^\circ/135^\circ$ -Achsensymmetrie auf 2 reduzieren lassen:  $x_1$ ,  $y_1$ . Sind diese Gittervariable bekannt, so kann auch die eingeschlossene Fläche bzw. die Abweichung zur Kreisfläche berechnet werden. Aus Gründen der Anschaulichkeit werden deshalb äquivalent zu  $x_1$  und  $y_1$  die Größen  $\Delta A/A_{\text{Kreis}}$  und  $y_1/R_{\text{Kreis}}$  variiert und die Abhängigkeit der Merkmale  $f_{R1}$ ,  $f_{R2}$  und  $IS_{11|\min}$  untersucht. Die Untersuchung bezieht sich auch hier auf die kreiszylindrische Struktur aus Abb. 2.

### 2.4.2 Feldnumerische Ergebnisse der geometrisch variablen Diskretisierungsvorschrift

Die Merkmale  $f_{R1}$ ,  $f_{R2}$  und  $IS_{11|\min}$  (vgl. Abb. 4) sind hier abhängig von den 2 variierten Gittergrößen  $\Delta A/A_{\text{Kreis}}$  und  $y_1/R_{\text{Kreis}}$  bei konstant 3 Unterteilungen. Die sich für die

Resonanzfrequenz  $f_{R1}$  ergebende Flächenfunktion ist in Abb. 7 über dem relevanten Grundgebiet dargestellt. Die Flächenfunktion wurde durch Ausgleichung im Gaußschen Sinne, d. h. durch Minimierung der quadratischen Abweichungen von den Simulationspunkten bestimmt.

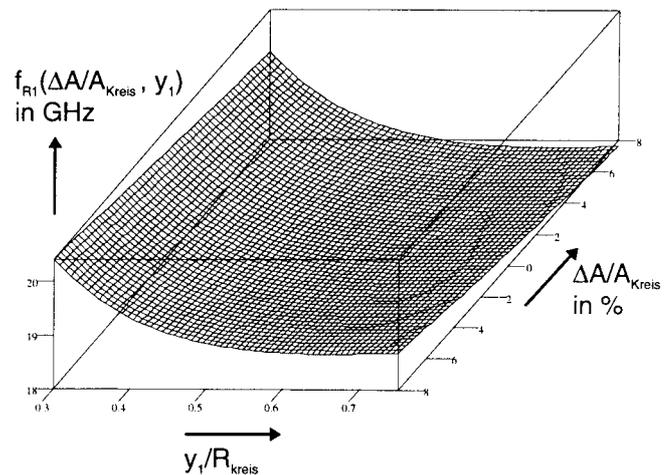


Abb. 7 Darstellung der Ausgleichsfächenfunktion  $f_{R1}(\Delta A/A_{\text{Kreis}}, y_1)$

In Abb. 7 zeigt die Flächenfunktion  $f_{R1}(\Delta A/A_{\text{Kreis}}, y_1)$  eine halbröhrenförmige Krümmung entlang der  $(y_1/R_{\text{Kreis}})$ -Achse und eine näherungsweise lineare Neigung entlang der  $(\Delta A/A_{\text{Kreis}})$ -Achse. Die Flächenfunktionen  $f_{R2}(\Delta A/A_{\text{Kreis}}, y_1)$  und  $IS_{11|\min}(\Delta A/A_{\text{Kreis}}, y_1)$  sind qualitativ mit Abb. 7 vergleichbar. Sie weisen jedoch eine veränderte Krümmung und Neigung auf. Um die notwendigen Eigenschaften zu finden, die eine optimierte Diskretisierungsvorschrift mit 3 Unterteilungen aufweisen muß, kann die funktionale Abhängigkeit  $\Delta A/A_{\text{Kreis}}(y_1/R_{\text{Kreis}})$  bei den Flächenfunktionen  $f_{R1}$ ,  $f_{R2}$  und  $IS_{11|\min}$  unter der Bedingung, daß der jeweilige wahre Wert erreicht wird, untersucht werden. Dies sind Höhenlinien der drei Flächenfunktionen. Die wahren Werte  $f_{R1, \text{wahr}}$ ,  $f_{R2, \text{wahr}}$  und  $IS_{11|\min, \text{wahr}}$  bezogen auf die kreiszylindrische Struktur aus Abb. 2 sind jedoch nicht bekannt. Andererseits sind die äußeren Grenzen gegeben innerhalb eines gewissen Fehlerintervalls durch die Diskretisierungsarten eingeschrieben und umschrieben (vgl. Abb. 5), innerhalb derer sich die wahren Werte maximal bewegen. Aus diesem Grunde werden diejenigen Höhenlinien betrachtet, die sich auf die jeweiligen Endwerte der entsprechenden Diskretisierungsart beziehen (= äußere Grenzen für wahre Werte) anstelle auf die wahren Werte selbst. Die Zusammenstellung der Ergebnisse kann Abb. 8 entnommen werden.

Aus Abb. 8 lassen sich folgende Erkenntnisse gewinnen :

- Es existiert keine ideale Diskretisierungsvorschrift für kreiszylindrische Strukturen, da sich nicht alle 3 Bereiche der Höhenlinien, innerhalb deren sich die wahren Höhenlinien bewegen, überlappen. Eine ideale Diskretisierungsvorschrift muß bei jeder Anzahl von Unterteilungen zu den auf die Struktur bezogenen wahren Werten  $f_{R1, \text{wahr}}$ ,  $f_{R2, \text{wahr}}$  und  $|S_{11}|_{\text{min, wahr}}$  im Rahmen der Gesamtungenauigkeit führen.
- Es existieren unendlich viele optimale Kreiszyylinder-Diskretisierungsvorschriften, da diese je nach Gewichtung entweder den wahren Wert  $f_{R1, \text{wahr}}$  oder  $f_{R2, \text{wahr}}$  oder  $|S_{11}|_{\text{min, wahr}}$  besser annähern.
- Die Diskretisierungsvorschriften eingeschrieben bzw. umschrieben sind nicht optimal, da sie eine Flächenabweichung zur Kreisfläche bei 3 Unterteilungen von - 45.4 % bzw. + 16.9 % aufweisen und somit außerhalb der äußersten Höhenlinien liegen.

- Eine optimale Diskretisierungsvorschrift muß alle Merkmale  $f_{R1}$ ,  $f_{R2}$ ,  $|S_{11}|_{\text{min}}$  gleichgewichtig berücksichtigen und darf deshalb nicht außerhalb der äußeren Höhenlinien liegen. Weiterhin zeigen alle Höhenlinien über  $y_1$  hinweg eine Annäherung, so daß sich folgende Bedingungen für eine optimierte Kreiszyylinder-Diskretisierungsvorschrift mit 3 Unterteilungen ergeben :

$$-10.0 \% < \frac{\Delta A}{A_{\text{Kreis}}} < +5.5 \% \quad (1)$$

$$60 \% < \frac{y_1}{R_{\text{Kreis}}} < 70 \% \quad (2)$$

### 2.4.3 Angabe einer optimierten Kreiszyylinder-Diskretisierungsvorschrift

Gewählt wurde unter Berücksichtigung der Bedingungen (1) und (2) eine Kreiszyylinder-Diskretisierungsvorschrift mit beliebiger Anzahl von Unterteilungen, die folgende Eigenschaften aufweist :

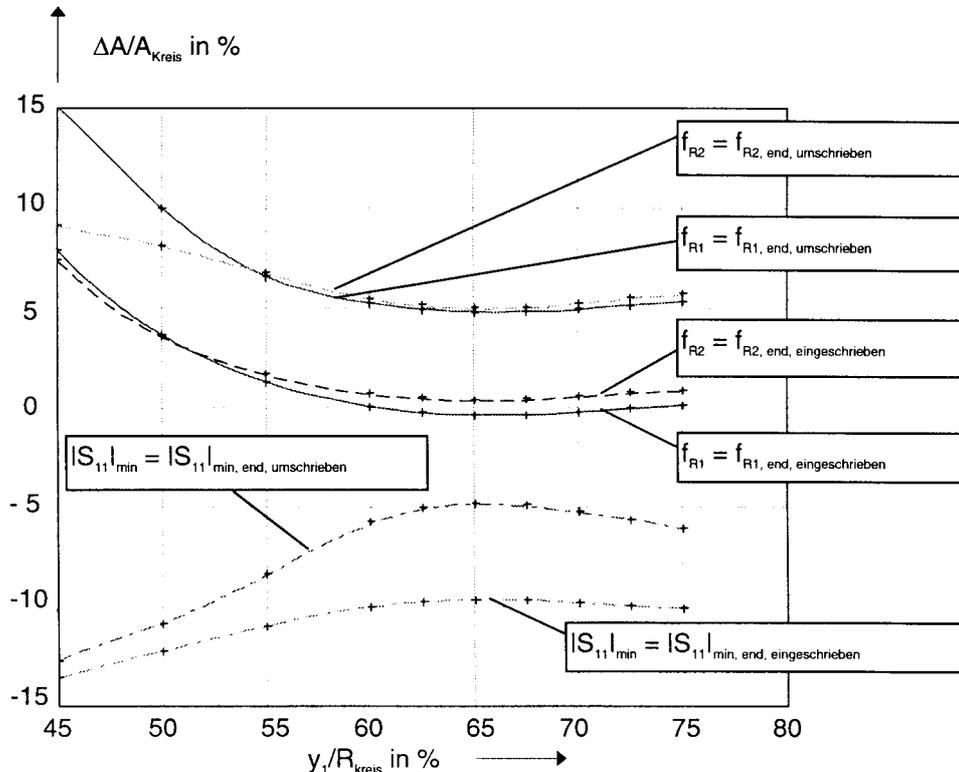
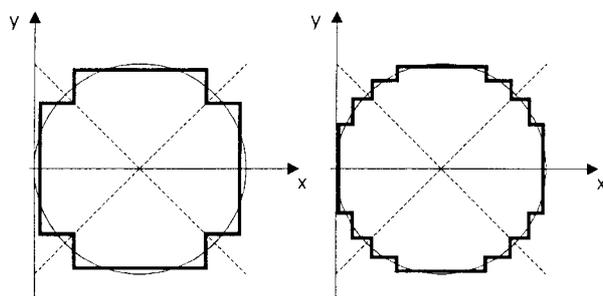


Abb. 8 Höhenlinien der Flächenfunktionen  $f_{R1}$ ,  $f_{R2}$ ,  $|S_{11}|_{\text{min}}$

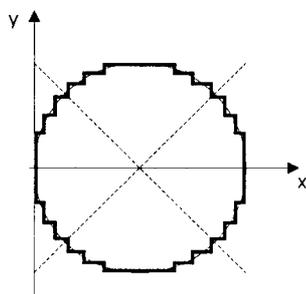
- Flächengleich mit Kreisfläche :  $\Delta A/A_{\text{Kreis}} = 0 \%$ , da jede Diskretisierungsvorschrift bei unendlich großer Anzahl von Unterteilungen auf Flächengleichheit mit der Kreisfläche führt.
- 45°-/135°-Achsensymmetrie aufgrund der Symmetrie des Kreises
- Mittiges Schneiden aller Treppenfunktionsabschnitte durch die Kreisfunktion, Ausnahme : Die äußeren zweifach geschnittenen Abschnitte, die zum Erreichen der Flächengleichheit entsprechend gewählt werden müssen. Bei 3 Unterteilungen ergibt sich dann :  
 $y_1 = 62.3 \% R_{\text{Kreis}}$

Abb. 9 zeigt diese optimierte Diskretisierungsvorschrift mit 3, 7 und 11 Unterteilungen.



(a) 3 Unterteilungen

(b) 7 Unterteilungen



(c) 11 Unterteilungen

Abb. 9 Optimierte Kreiszyylinder-Diskretisierungsvorschrift

## 2.4.4 Feldnumerische Ergebnisse der optimierten Kreiszyylinder-Diskretisierungsvorschrift

Die Anwendung der unter 2.4.3 gefundenen optimierten Kreiszyylinder-Diskretisierungsvorschrift auf die in Abb. 2 dargestellte kreiszylindrische Struktur zeigt Abb. 10 im Vergleich mit den Diskretisierungsarten eingeschrieben und um-

schrieben. Die Resonanzfrequenz  $f_{R1}$  nähert sich bei steigender Anzahl von Unterteilungen rasch einem Endwert, der wie zu erwarten im Bereich zwischen den Endwerten durch die um- und eingeschriebenen Diskretisierungsarten liegt. Hierbei wird der nicht-ideale, jedoch optimierte Charakter ersichtlich. Die Diagramme für die Merkmale  $f_{R2}$  und  $IS_{11|_{\min}}$  sind vergleichbar.

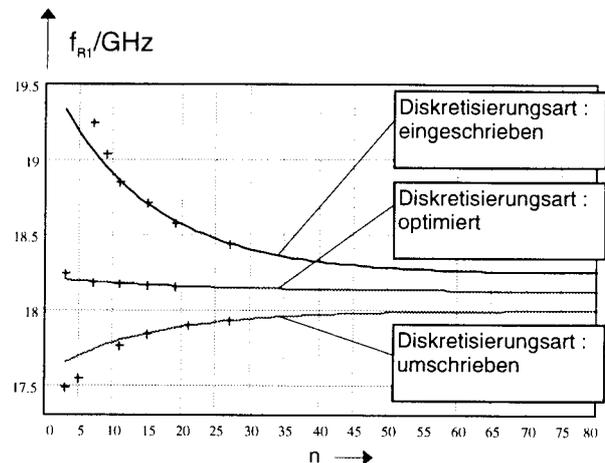


Abb.10 Darstellung  $f_{R1}(n)$ , n : Anzahl an Unterteilungen

## Literatur

- [1] M. Buchner, "Die Methode der Finiten Elemente zur Berechnung elektromagnetischer und mechanischer Felder in Filter-Bauelementen", Reihe 21 : Elektrotechnik, Nr. 106; Düsseldorf : VDI-Verlag 1992
- [2] A. Christ and H. L. Hartnagel, "Three-Dimensional Finite-Difference Method for the Analysis of Microwave-Device Embedding", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 35, No. 8, August 1987
- [3] A. Christ "Streu matrixberechnung mit dreidimensionalen Finite-Differenzen für Mikrowellen-Chip-Verbindungen und deren CAD-Modelle", Darmstädter Dissertation D17; Düsseldorf : VDI-Verlag 1988
- [4] K. Beilenhoff, W. Heinrich, and H.L. Hartnagel, "Improved Finite-Difference Formulation in Frequency Domain for Three-Dimensional Scattering Problems", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. 40, No. 3, March 1992
- [5] A. Christ "Reflexionsverhalten von Verbindungsstrukturen für Mikrowellenbauteile", Frequenz 42 (1988) 1, S. 7-13
- [6] A. Christ, J. M. Dieudonne, and V. Krozer, "Accurate Characterization of DR Coupling with new General-Purpose CAD Program", Electronic Letters 25 (1989) 16, S. 1026-1028
- [7] A. Christ, R. Dill, and M. Buchner, "Rigorous Analysis of Ceramic Band-Pass Filters", Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik 46 (1992) 1, S. 58-60